

1. 명제 ' x 가 소수이면 x 는 홀수이다.'는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

2. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$

② $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\ &\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

3. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x - 1$

② $x \rightarrow x$ 의 양의 제곱근

③ $x \rightarrow x$ 를 4 로 나눈 나머지

④ $x \rightarrow x^2 - 1$

⑤ $x \rightarrow |-1|$

해설

① $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1 - 1 = 0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

② $x = 2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$
따라서 함수가 아니다.

③ $x = 4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

④ $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2 - 1 = 0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

4. 함수 $f(x) = ax + b (a > 0)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 이 함수 $f(x)$ 와 같을 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = 1, b = 0$

② $a = 1, b = 1$

③ $a = 2, b = 0$

④ $a = 2, b = 1$

⑤ $a = 3, b = 0$

해설

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ 에서 } f(f(x)) = x$$

$$f(f(x)) = af(x) + b$$

$$= a(ax + b) + b$$

$$= a^2x + ab + b$$

$$a^2x + ab + b = x$$

$$\therefore a^2 = 1, ab + b = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

5. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

6. $\frac{x+1+\frac{1}{x-1}}{x-1-\frac{1}{x-1}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{x}{x-1}$

② $\frac{x}{x-2}$

③ $\frac{x-1}{x-2}$

④ $\frac{x^2}{x-1}$

⑤ $\frac{x^2}{x-2}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{x+1+\frac{1}{x-1}}{x-1-\frac{1}{x-1}} &= \frac{(x+1)(x-1)+1}{\frac{(x-1)^2-1}{x-1}} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)+1}{(x-1)^2-1} \\ &= \frac{x^2}{x^2-2x} = \frac{x^2}{x(x-2)} \\ &= \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

7. 다음 중 집합의 원소를 구한 것 중 옳지 않은 것은?

① 5보다 작은 자연수의 모임 $\rightarrow 1, 2, 3, 4$

② 10이하의 소수의 모임 $\rightarrow 2, 3, 5$

③ 우리 나라 사계절의 모임 $\rightarrow$ 봄, 여름, 가을, 겨울

④ 사군자의 모임 $\rightarrow$ 매화, 난초, 국화, 대나무

⑤ 8의 약수의 모임 $\rightarrow 1, 2, 4, 8$

해설

② 10이하의 소수의 모임 $\rightarrow 2, 3, 5, 7$

8. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 짝수 중 8의 약수는 반드시 포함하고, 홀수는 포함하지 않는 부분집합을 골라라.

㉠ $\{2, 4, 6, 8\}$

㉡ $\{2, 3, 4, 8\}$

㉢ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

㉣ $\{2, 4, 6, 8, 9\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉢

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이고 이 중에서 짝수인 8의 약수는 2, 4, 8이며, 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이다. ㉡은 3이 포함되어 있고 ㉣은 9가 포함되어 있으므로 조건에 맞지 않는다.

9. 집합 $A = \{1, 3, 5, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

집합 A 의 원소의 개수를 a 개라 하면 원소 1, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{a-2} 개이다.

$$2^{a-2} = 32 = 2^5$$

$$a - 2 = 5 \text{ 이므로 } a = 7$$

따라서 집합 A 의 원소의 개수가 7 개이므로 n 의 값은 13 이다.

10. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 원소 x, y 에 대하여 다음 명제 중 거짓인 것은?

① 어떤 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

② 어떤 x, y 에 대하여 $x + y \leq 5$ 이다.

③ 모든 x 에 대하여 $x - 1 < 5$ 이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 - 1 \leq 0$ 이다.

⑤ 모든 x 에 대하여 $|x - x^2| \geq 5$ 이다.

해설

⑤ (반례) $x = 1$ 인 경우 $|1 - 1| = 0$ 이므로 거짓이다.

11. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. 명제 ' p 이면 $\sim q$ 이다.'가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $Q \subset P$

③ $P - Q = P$

④ $Q^c \subset P$

⑤ $P \cup Q^c = U$

해설

$p \Rightarrow \sim q$ 이면 $P \subset Q^c$ 인 진리집합의 관계가 성립한다. 즉,
 $P \cap Q^c = P \Leftrightarrow P - Q = P$

12. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 명제 $p \Rightarrow \sim q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow q$ 일 때, 보기 중 참인 명제의 개수는?

$$\textcircled{\neg} q \Rightarrow p$$

$$\textcircled{\text{L}} s \Rightarrow r$$

$$\textcircled{\text{E}} r \Rightarrow s$$

$$\textcircled{\text{E}} p \Rightarrow \sim s$$

$$\textcircled{\text{H}} q \Rightarrow \sim p$$

$$\textcircled{\text{H}} \sim r \Rightarrow \sim q$$

$$\textcircled{\text{A}} s \Rightarrow \sim p$$

① 3개

② 4개

③ 5개

④ 6개

⑤ 7개

해설

$\textcircled{\text{L}}, \textcircled{\text{E}}, \textcircled{\text{H}}, \textcircled{\text{H}}, \textcircled{\text{A}}$ 이 참이다.

$p \Rightarrow \sim q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow q$ 이므로

그 각각의 대우도 참이다.

$$\therefore q \Rightarrow \sim p, \sim r \Rightarrow \sim q, \sim q \Rightarrow \sim s$$

$$p \Rightarrow \sim q, \sim q \Rightarrow \sim s \text{ 이므로}$$

$$\therefore p \Rightarrow \sim s, s \Rightarrow \sim p$$

$$s \Rightarrow q, q \Rightarrow r \text{ 이므로}$$

$$\therefore s \Rightarrow r$$

13. 어떤 건물에 불이 나서 경찰이 조사하였더니 누군가 방화한 것이고, ‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’라는 사실을 알아내었으며 불이 난 시간에 건물 안에 있었던 용의자를 잡아 범인으로 단정하였다. 이러한 단정은 반드시 옳은가? 또, 그 근거를 논리적으로 옳게 설명한 것은?

- ① 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow p$ 도 반드시 참이다.
- ② 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참이 되는 것은 아니다.
- ③ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 반드시 참이다.
- ④ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참이 되는 것은 아니다.
- ⑤ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 반드시 참이다.

해설

‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’가 참이라고 해서 ‘건물 안에 있었던 사람이 방화범이다.’도 참이라고 할 수는 없다. 즉, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 그 역인 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참인 것은 아니다.

14. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + 12y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\left(3x + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + 12y\right) &= 3 + 36xy + \frac{1}{xy} + 12 \\ &= 15 + 36xy + \frac{1}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{36 \frac{1}{xy} \cdot xy} + 15 = 27\end{aligned}$$

15. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = |2(x - 2)| - 4$ 의 그래프는

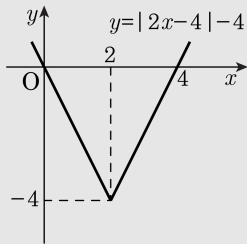
$y = |2x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로

다음 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



16. $\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \times \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$ 을 계산하면?

① $x^2 + x + 1$

② $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$

③ $\frac{2x}{x^2 - 1}$

④ $x^2 - 1$

⑤ $\frac{2x - 1}{x^2 - x}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} \\ & - \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} \times \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} \\ & = x + 1 + x^2 + 1 - 1 = x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

17. 분수식 $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $-\frac{x-2}{x(x-1)}$

② $\frac{x+2}{x(x+1)}$

③ $\frac{x-2}{x(x+1)}$

④ $\frac{x+2}{x(x-1)}$

⑤ $\frac{x-2}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x+1} &= 1 - \frac{1}{x+1}, \\
 \frac{2x-1}{x-1} &= 2 + \frac{1}{x-1}, \\
 \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x} &= 3 + \frac{x+2}{x^2+x} \quad \text{이므로} \\
 (\text{준식}) &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) \\
 &\quad - \left(3 + \frac{x+2}{x^2+x}\right) \\
 &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x(x+1)} \\
 &= \frac{-x(x-1) + x(x+1) - (x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-x^2 + x + x^2 + x - x^2 - x + 2}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-x^2 + x + 2}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{-(x^2 - x - 2)}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{-(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= -\frac{x-2}{x(x-1)}
 \end{aligned}$$

18. 다음 식의 최댓값을 구하면?

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$$

① $\frac{3}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{1}{5}$

④ $-\frac{1}{5}$

⑤ $-\frac{2}{5}$

해설

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \cdots \frac{1}{(x+9)(x+10)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = \frac{x+10-x}{x(x+10)} \\ &= \frac{10}{x(x+10)} = \frac{10}{(x+5)^2 - 25} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{최댓값은 } x = -5 \text{ 일 때 } \frac{10}{-25} = -\frac{2}{5}$$

19. 분수함수 $f(x) = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1, 2a)$ 를 지날 때, $1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

분수함수 $f(x) = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1, 2a)$ 를 지나므로

$$2a = \frac{a}{a-1}, 2a^2 - 3a = 0, a(2a - 3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2} (\because a \neq 0)$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2x}$ 이므로 $1 \leq x \leq 3$ 에서

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최댓값 $f(1) = \frac{3}{2}$ 을 가진다.

20. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ 의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A 라 할 때 $n(A)$ 를 구하면?

㉠ $2 \in A$

㉡ $m, n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

㉠ 6

㉡ 8

㉢ 10

㉣ 12

㉤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$

$2 \in A$, $2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$

이와 같은 과정을 반복하면

$2^4 \in A$, $2^5 \in A$, $2^6 \in A, \dots$

따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ 이다.

21. 집합 $A = \left\{ x \mid x = \frac{30}{n}, x \text{와 } n \text{은 모두 자연수} \right\}$ 일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

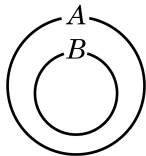
x 가 자연수가 되려면 n 은 30 의 약수가 되어야 한다.

$n = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ 일 때,

$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$\therefore n(A) = 8$

22. 두 집합 A, B 사이의 관계가 다음 벤 다이어그램과 같고, 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 36 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 약수}\}$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 없는 것은?



- ① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 36

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

- ① $\{1, 2, 3, 6\} \subset A$
 ② $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \subset A$
 ③ $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \subset A$
 ④ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \not\subset A$
 ⑤ $B = A$

23. 집합 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소가 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

집합 A 의 원소 중 짝수는 2, 4, 6 이므로 $\{2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중에서 $\emptyset$ 을 제외한 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$ 이다.

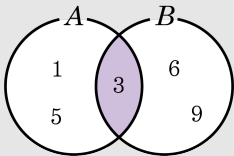
24. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$ 일 때, 집합 B 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 6, 9\}$

해설

$A = \{1, 3, 5\}$ 이고, 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B = \{3, 6, 9\}$ 이다.

25. 은지네반 35명의 학생의 생활습관 조사를 하였다. 11시 이전에 자는 학생이 18명이고, 아침밥을 매일 먹는 학생이 22명이었다. 이때, 11시 이전에 자고 아침밥을 매일 먹는 최대 인원수를 a , 최소 인원수를 b 라고 할 때, a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답 :

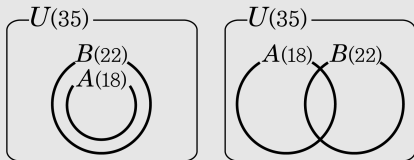
▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 18$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

11시 이전에 자는 학생의 집합을 A , 아침밥을 매일 먹는 학생의 집합을 B 라고 할 때, 교집합의 개수의 최대, 최소는 다음 벤 다이어그램을 보면 알 수 있다.



11시 이전에 자는 학생 18명 모두 아침밥을 먹는다고 가정했을 때, 최대인원수는 18명이다. 35명의 학생 중 적어도 한 명은 11시 이전에 자거나 아침밥을 먹는다고 가정하면, 최소 인원수는 $18 + 22 - 35 = 5$ (명)이다.

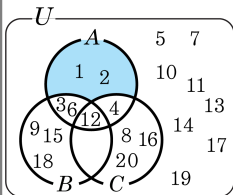
26. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$,
 $B = \{x|x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$,
 $C = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A - B) \cap C^C$ 을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: $\{1, 2\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 18, 19, 20\}$,
 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
 이므로 $(A - B) \cap C^C$ 을 벤 다이어그램
 으로 나타내면 다음과 같다.
 $\therefore (A - B) \cap C^C = \{1, 2\}$



27. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

$\{3, 4\}$ 로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8 - 2 = 6$ 따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

28. 서로소인 두 자연수 $m, n(m > n)$ 에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\frac{151}{87}$ 을 나타낼 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 의 값은?

$$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} \frac{151}{87} &= 1 + \frac{64}{87} = 1 + \frac{1}{\frac{87}{64}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{23}{64}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{64}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{18}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{18}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{18}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{5}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{1 + \frac{3}{3}}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} \end{aligned}$$

$\therefore a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 3$ 이므로
 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$

29. 자연수 N 에 대해 $A_N = \{x | x \text{는 } N \text{보다 작은 소수}\}$ 로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 15 개일 때, N 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

A_N 의 진부분집합의 개수 : 15 개

→ A_N 의 부분집합의 개수 : 16 개

→ $2^{n(A_N)} = 16, n(A_N) = 4$,

A_N 은 N 보다 작은 소수를 원소로 가지므로 원소의 개수가 4 개가 되려면 $A_N = \{2, 3, 5, 7\}$,

따라서 N 의 최솟값은 8, 최댓값은 11 이므로 N 의 최댓값과 최솟값의 합은 19

30. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $(A-B) \cup (B-C) \cup (C-A) = \emptyset$ 이다. $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때, $n(B) \times n(C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset \text{ 이면}$$

$$A - B = \emptyset, B - C = \emptyset, C - A = \emptyset ,$$

$$A \subset B, B \subset C, C \subset A \text{ 이므로}$$

$$A = B = C$$

$$\text{따라서 } n(B) = n(C) = 3 \text{ 이므로 } n(B) \times n(C) = 9$$

31. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A = \{x|x < 10\}$, $B = \{x|x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\}$ 에 대하여 $n(A \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A, B 는 자연수 전체 집합의 부분집합이므로

$$A = \{x|x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$B = \{x|x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\} = \{2, 4, 5, 7, 8\},$$

$$A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 6, 9\},$$

따라서, $n(A \cap B^c) = 4$

32. 임의의 양수 x, y 에 대하여 항상 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

해설

① $f(0) = f(1 \times 0) = f(1) + f(0)$

$\therefore f(1) = 0$

② $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④ $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

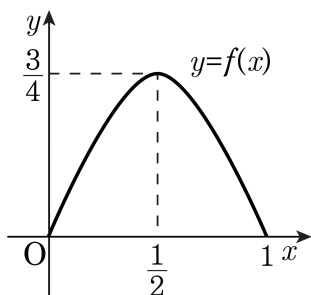
$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right), f(1) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= f(x) - f(y) (\because \text{④가참})$

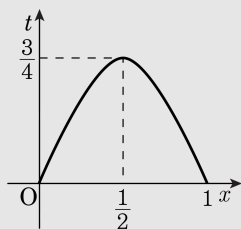
33. 다음 그림은 함수 $f(x) = 3x(1-x)$ 의 그래프의 일부이다. $0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = f(f(x))$ 의 치역은?



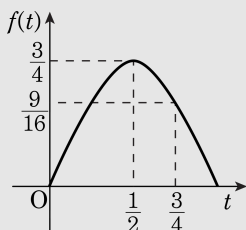
- ① $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\}$ ② $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$
 ③ $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{9}{16}\}$ ④ $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{3}{4}\}$
 ⑤ $\{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$

해설

$t = f(x) = 3x(1-x)$ 라 놓으면 아래 그림에서



$0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ 임을 알 수 있다. $0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ 일 때, $y = f(t)$ 라 놓으면

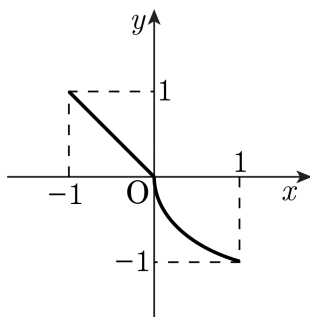


$0 \leq y \leq \frac{3}{4}$ 임을 알 수 있다.

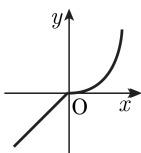
따라서, $y = f(f(x))$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{3}{4}\}$ 이다.

34. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 함수 f 를 $f(x) = \begin{cases} -x & (-1 \leq x \leq 0) \\ -\sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 로

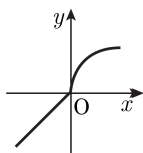
정의하고, $g = f \circ f$ 라 할 때, 다음 중 $g^{-1}(x)$ 의 그래프를 그리면?



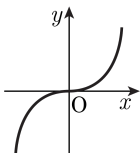
①



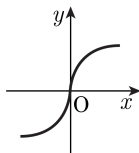
②



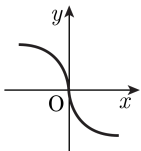
③



④



⑤



해설

$-1 \leq x \leq 0$ 일 때, $f(x) = -x \geq 0$ 이므로

$g(x) = f(f(x)) = f(-x) = -\sqrt{-x}$ 이다.

$0 \leq x \leq 1$ 일 때 $f(x) = -\sqrt{x} < 0$ 이므로

$g(x) = f(f(x)) = f(-\sqrt{x}) = -(-\sqrt{x}) = \sqrt{x}$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1) \\ -\sqrt{-x} & (-1 \leq x \leq 0) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$y = g(x)$ 의 그래프는 ④이다.

또한 $y = g^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로

③이다.

35. a, b, c 가 서로 다른 복수소일 때, $\frac{b}{a-1} = \frac{c}{b-1} = \frac{a}{c-1} = k$ 라고 하자. 이 때, $1 + k + k^2 + \cdots + k^{2000}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$b = ak - k, \quad c = bk - k, \quad a = ck - k$$

$\therefore b - c = (a - b)k, \quad c - a = (b - c)k, \quad a - b = (c - a)k$ 에서
변변끼리 곱하면,

$$(a - b)(b - c)(c - a) = (a - b)(b - c)(c - a)k^3$$

$$\therefore k^3 = 1, \quad k^2 + k + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (1 + k + k^2) + k^3(1 + k + k^2) + \cdots \\ &\quad + k^{1998}(1 + k + k^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$