1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $\{1,\ 6\} \subset \{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$

② $\{1,\ 2\} \subset \{2,\ 1\}$

③ $\{\varnothing\} \subset \{1\}$

④ $\{2,\ 4,\ 6\ ,8,\ 10\} \subset \{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$

⑤ $\{1,\ 5\} \subset \{x \mid x$는 5의 약수$\}$

해설

③ $\{\varnothing\} \not\subset \{1\}$

2. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ 의 부분집합 중 원소 0 은 반드시 포함하고 짝수인 원소는 포함하지 않는 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{0\}$

▷ 정답 : $\{0,\ 1\}$

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 0 은 반드시 포함하고 짝수인 원소 2 를 포함하지 않는 부분집합을 원소의 개수별로 차례대로 구하면 $\{0\}$, $\{0, 1\}$ 이다

3. 두 집합 $A = \{2,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $B = \{5, 9, 10, 11, 13\}$ 에서 $A \cap X = X$, $B \cup X = B$ 를 만족하는 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 8 개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$,
$B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$ 이므로
$X \subset A \cap B = \{5,\ 9,\ 10\}$
집합 X 는 $\{5,\ 9,\ 10\}$ 의 부분집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap (A \cap B^c)^c$ 을 간단히 나타내면?

① A ② B ③ A^c ④ $A \cap B$ ⑤ $A \cup B$

해설

$$\begin{aligned} A \cap (A \cap B^c)^c &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

5. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이고 $g(1) = 0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면
$g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.
모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이므로
양변의 차수를 비교하면 $n^2 = 1$
$\therefore n = 1$ ($\because n$ 은 자연수)
즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로
$g(x) = ax + b$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로
$a + b = 0$, 즉 $b = -a$
$\therefore g(x) = ax + b = ax - a$
$g(g(x)) = g(ax - a) = a(ax - a) - a$
$= a^2x - a^2 - a = x$
이 식은 x 에 대한 항등식이므로
$a^2 = 1$, $-a^2 - a = 0$
$\therefore a = -1$
즉, $g(x) = -x + 1$ 이므로 $g(-1) = 2$

6. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

7. 두 함수 $f(x)=-3x+k,\ g(x)=2x+4$에 대하여, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립하도록 하는 k의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$f(x)=-3x+k,\ g(x)=2x+4$에서

$(f\circ g)(x)=f(2x+4)=-3(2x+4)+k$

$=-6x-12+k\cdots$ ㉠

$(g\circ f)(x)=g(-3x+k)=2(-3x+k)+4$

$=-6x+2k+4\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$-6x-12+k=-6x+2k+4$

$\therefore k=-16$

8. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $n(X) = n(Y)$이다.

② $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

③ $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ (f 의 정의역) = (f^{-1} 의 치역)
(f^{-1} 의 정의역) = (f 의 치역)

9. 함수 $f(x) = ||x-2|-1|+k$ 에 대하여 $f(-1) = 5$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1) = 5$ 이므로
$f(-1) = ||-1-2|-1|+k = 2+k = 5$
따라서 $k = 3$ 이므로
$\therefore\ f(5) = ||5-2|-1|+3 = 5$

10. $y = \dfrac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x=1$, $y=-2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$y = \dfrac{3-ax}{1-x} = \dfrac{ax-3}{x-1} = \dfrac{a-3}{x-1} + a$

이 분수함수의 점근선은 $x=1$, $y=a$

$\therefore\ a=-2$

11. 두 집합 $A = \{a, \square, b, d\}$, $B = \{b, c, \square, d\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 알파벳을 차례대로 써넣어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : c

▷ 정답 : a

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 A, B 의 모든 원소가 같아야 하므로 두 집합을 비교하면 집합 A 의 $\square = c$ 이고, 집합 B 의 $\square = a$ 이다.

12. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 $A = \{a, b, e\}$, $B = \{b, c\}$ 에 대하여
$(A \cup B)^c \subset X, (A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$(A \cup B)^c = \{d\}$, $(A - B)^c = \{b, c, d\}$
$(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$, 즉 $\{d\} \subset X \subset \{b, c, d\}$ 이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

13. 다음 보기 중 참인 명제를 모두 고르면?

① $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이다. (단, x, y는 실수)

② $x+y$, xy 가 모두 실수이면 x, y 도 모두 실수이다.

③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.

④ $x+y>1$ 이면 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.

⑤ x 가 16 의 약수이면 x 는 8 의 약수이다.

해설

① 실수 범위에서 $x=0$, $y=0$ 일 경우에만 성립하므로 참이다.
③ 홀수끼리 곱하면 항상 홀수가 나오므로 참이다.

14. 명제「$p \to \sim q$」의 역이 참일 때, 반드시 참인 명제는?

① $p \to q$ ② $\sim p \to q$ ③ $\sim p \to \sim q$
④ $\sim q \to p$ ⑤ $\sim q \to \sim p$

해설
주어진 명제의 역「$\sim q \to p$」가 참이므로, 반드시 참인 명제는 역의 대우인「$\sim p \to q$」도 참이다.

15. $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A-(A-B)=A$ 이기 위한 필요충분조건이 <u>아닌</u> 것은?

① $A \subset B$　　② $A^c \subset B^c$　　③ $A-B=\varnothing$

④ $A \cup B = B$　　⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

$$\begin{aligned} A-(A-B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$\therefore\ A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$

17. 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 $x,\ y$ 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f(8) = 3f(2)$

해설

임의의 양수 $x,\ y$ 에 대하여

$f(xy) = f(x) + f(y)$ 가 성립해야하므로

① $x = 1,\ y = 1$ 을 대입하면

$f(1) = f(1) + f(1)$

$\therefore\ f(1) = 0$

$\therefore$ 참

② $x = 2,\ y = 3$ 을 대입하면

$f(6) = f(2) + f(3)$

$\therefore$ 참

③ $x = x,\ y = x$ 를 대입하면

$f(x^2) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

$\therefore\ f(x^2) \neq f(2x)$

$\therefore$ 거짓

④ $x = x,\ y = \frac{1}{x}$ 를 대입하면

$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

① 에서 $f(1) = 0$ 이므로

$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$\therefore$ 참

⑤ $x = 4,\ y = 2$ 를 대입하면,

$f(4 \times 2) = f(4) + f(2) \cdots$ ㉠

또, $4 = 2 \times 2$ 이므로,

$f(4) = f(2) + f(2) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $f(8) = 3f(2)$

$\therefore$ 참

18. 다음 보기의 함수 중에서 일대일 대응인 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x^2 + 1$

㉡ $g(x) = -x + 1$

㉢ $h(x) = x^3$

㉣ $i(x) = 2$

㉤ $j(x) = |2x - 1| \ (x \geq 1)$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

일대일 대응이란 정의역이 x 에 치역 y 가
하나씩 대응 될 때를 말한다.
㉠, ㉣ 일대일 대응이 아니다.
㉡ 함수가 아니다.
따라서 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢, ㉤ 3 개이다.

19. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{12+c}{3+2}$

$\therefore\ c = -7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$f(1) = \dfrac{-3}{3} = -1$

20. 함수 $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g \cdot f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(g \circ f)(x) = x$

$\Rightarrow \quad g(f(x)) = x$

$\Rightarrow \quad g\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right) = x$

$\therefore \quad g(1)$ 을 구하려면, $\dfrac{x+2}{2x-1} = 1$ 이 되어야 한다.

$\Rightarrow \quad x = 3 \quad \therefore \quad g(1) = 3$

21. A가 집합일 때 $P(A)$를 $P(A)=\{X \mid X \subset A\}$로 정의하기로 한다. 이때, 다음 중 옳은 것은?

① $A \subset P(A)$　　② $\{A\} \subset P(A)$　　③ $\{A\} \in P(A)$
④ $\{A\} = P(A)$　　⑤ $A \notin P(A)$

해설

집합 A는 집합 $P(A)$의 원소이므로 $A \in P(A)$
따라서 A를 원소로 하는 부분집합 $\{A\}$는 $P(A)$의 부분집합이다.
$\therefore\ \{A\} \subset P(A)$

22. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 12 이하의 홀수$\}$, $B = \{x \mid x$는 3 이상 5 이하의 소수$\}$에 대하여 $X \subset A$, $B \subset X$이고 집합 X 의 원소의 개수가 5 인 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$
$B = \{3,\ 5\}$
$X \subset A,\ B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$
$\{3,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5는 반드시 포함하고 원소의 개수가 5 개인 집합이므로
$\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\{1, 3, 5, 7, 11\}$, $\{1, 3, 5, 9, 11\}$, $\{3, 5, 7, 9, 11\}$의 4 개이다.

23. 집합 $A = \{x \mid 2 \le x < a\text{인 자연수}\}$에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 16 개가 되기 위한 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$2^{n(A)} = 16 = 2^4 \qquad \therefore\ n(A) = 4$

$A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{x \mid 2 \le x < 6\text{인 자연수}\}$

$\therefore\ a = 6$

24. 전체집합 $U = \left\{3 \times x + 1 | x < 10,\ x\text{는 자연수}\right\}$ 의 부분집합 A, B 가 있다.
$A^c \cap B^c = \{28\}$, $(A \cup B) - (A \cap B) = \{4, 10, 19, 25\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$U = \{3 \times x + 1 | x < 10$, x 는 자연수$\} = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$,
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{28\}$,
$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{4, 10, 19, 25\}$,
전체집합 U 는 $A - B$, $B - A$, $(A \cup B)^c$, $A \cap B$ 로 이루어지므로,
$A \cap B = \{7, 13, 16, 22\}$ 이다.
$\therefore n(A \cap B) = 4$

25. $x>0,\ y>0$ 일 때, $\left(x+\dfrac{1}{4y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+8y\right)$ 의 최솟값을 다음과 같이 구하였다. 이 과정에서 최초로 잘못된 부분과 옳은 답을 구하면?

> $\left(x+\dfrac{1}{4y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+8y\right) \geq 2\sqrt{\dfrac{x}{4y}} \times 2\sqrt{\dfrac{8y}{x}}$: (가)
>
> $\Bigg(\because\ \ x+\dfrac{1}{4y}\ \dfrac{\geq}{2}\sqrt{x\times\dfrac{1}{4y}}$, : (나)
>
> $\dfrac{1}{x}+8y \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x}\times 8y}\Bigg)$: (다)
>
> 따라서 최솟값은 $4\sqrt{2}$: (라)

① (가) , $4\sqrt{2}+3$　② (나) , $2+2\sqrt{2}$　③ (다) , $3+2\sqrt{2}$
④ (라) , $4+3\sqrt{2}$　⑤ (가) , $3+2\sqrt{2}$

해설

$x>0,\ y>0$ 일 때

i) $x+\dfrac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x\times\dfrac{1}{4y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

이 때, 등호는 $x=\dfrac{1}{4y}$, 즉 $xy=\dfrac{1}{4}$ 일 때 성립한다.

ii) $\dfrac{1}{x}+8y \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot 8y} = 4\sqrt{\dfrac{2y}{x}}$

이 때, 등호는 $\dfrac{1}{x}=8y$, 즉 $xy=\dfrac{1}{8}$ 일 때 성립한다.

i), ii) 에서 등호가 성립하는 조건이 다르므로 (가)와 같이 나타낼 수 없다.

iii) $\left(x+\dfrac{1}{4y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+8y\right)$

$= 3+\dfrac{1}{4xy}+8xy \geq 3+2\sqrt{\dfrac{1}{4xy}\cdot 8xy}$

$= 3+2\sqrt{2}$

$\therefore$ 최솟값은 $3+2\sqrt{2}$