

1. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $\{1, 6\} \subset \{1, 2, 4, 6\}$

② $\{1, 2\} \subset \{2, 1\}$

③ $\{\emptyset\} \subset \{1\}$

④ $\{2, 4, 6, 8, 10\} \subset \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$

⑤ $\{1, 5\} \subset \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 약수}\}$

해설

③ $\{\emptyset\} \not\subset \{1\}$

2. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소는 포함하지 않는 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{0\}$

▷ 정답 : $\{0, 1\}$

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소 2를 포함하지 않는 부분집합을 원소의 개수별로 차례대로 구하면 $\{0\}, \{0, 1\}$ 이다

3. 두 집합 $A = \{2, 5, 8, 9, 10\}$, $B = \{5, 9, 10, 11, 13\}$ 에서 $A \cap X = X$, $B \cup X = B$ 를 만족하는 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$,

$B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$ 이므로

$X \subset A \cap B = \{5, 9, 10\}$

집합 X 는 $\{5, 9, 10\}$ 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap (A \cap B^c)^c$ 을 간단히 나타내면?

① A

② B

③ A^c

④ $A \cap B$

⑤ $A \cup B$

해설

$$\begin{aligned} A \cap (A \cap B^c)^c &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

5. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이고 $g(1) = 0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면

$g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이므로

양변의 차수를 비교하면 $n^2 = 1$

$\therefore n = 1$ ($\because n$ 은 자연수)

즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로

$g(x) = ax + b$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로

$a + b = 0$, 즉 $b = -a$

$\therefore g(x) = ax + b = ax - a$

$g(g(x)) = g(ax - a) = a(ax - a) - a$

$= a^2x - a^2 - a = x$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$a^2 = 1$, $-a^2 - a = 0$

$\therefore a = -1$

즉, $g(x) = -x + 1$ 이므로 $g(-1) = 2$

6. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\therefore (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$$

7. 두 함수 $f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16

② -14

③ -6

④ -4

⑤ -2

해설

$f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에서

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(2x + 4) = -3(2x + 4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \textcircled{㉠}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(-3x + k) = 2(-3x + k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \textcircled{㉡}\end{aligned}$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$-6x - 12 + k = -6x + 2k + 4$$

$$\therefore k = -16$$

8. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $n(X) = n(Y)$ 이다.

② $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

③ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ $(f \text{ 의 정의역}) = (f^{-1} \text{ 의 치역})$

$(f^{-1} \text{ 의 정의역}) = (f \text{ 의 치역})$

9. 함수 $f(x) = ||x - 2| - 1| + k$ 에 대하여 $f(-1) = 5$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(-1) = 5$ 이므로

$$f(-1) = ||-1 - 2| - 1| + k = 2 + k = 5$$

따라서 $k = 3$ 이므로

$$\therefore f(5) = ||5 - 2| - 1| + 3 = 5$$

10. $y = \frac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x = 1$, $y = -2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = \frac{3-ax}{1-x} = \frac{ax-3}{x-1} = \frac{a-3}{x-1} + a$$

이 분수함수의 점근선은 $x = 1$, $y = a$

$$\therefore a = -2$$

11. 두 집합 $A = \{a, \square, b, d\}$, $B = \{b, c, \square, d\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 알파벳을 차례대로 써넣어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : c

▷ 정답 : a

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 A , B 의 모든 원소가 같아야 하므로 두 집합을 비교하면 집합 A 의 $\square = c$ 이고, 집합 B 의 $\square = a$ 이다.

12. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 $A = \{a, b, e\}$, $B = \{b, c\}$ 에 대하여
 $(A \cup B)^c \subset X$, $(A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$$(A \cup B)^c = \{d\}, (A - B)^c = \{b, c, d\}$$

$(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$, 즉 $\{d\} \subset X \subset \{b, c, d\}$ 이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

13. 다음 보기 중 참인 명제를 모두 고르면?

- ① $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다. (단, x, y 는 실수)
- ② $x + y, xy$ 가 모두 실수이면 x, y 도 모두 실수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.
- ④ $x + y > 1$ 이면 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.
- ⑤ x 가 16 의 약수이면 x 는 8 의 약수이다.

해설

- ① 실수 범위에서 $x = 0, y = 0$ 일 경우에만 성립하므로 참이다.
- ③ 홀수끼리 곱하면 항상 홀수가 나오므로 참이다.

14. 명제「 $p \rightarrow \sim q$ 」의 역이 참일 때, 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $\sim p \rightarrow q$

③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim q \rightarrow p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제의 역「 $\sim q \rightarrow p$ 」가 참이므로, 반드시 참인 명제는 역의 대우인「 $\sim p \rightarrow q$ 」도 참이다.

15. $x \leq -2$ 또는 $0 < x \leq 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \leq a$ 이고, 충분조건이 $x \leq b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \leq b\} \subset \{x \mid x \leq -2 \text{ 또는 } 0 < x \leq 3\} \subset \{x \mid x \leq a\}$ 가 되어야 하므로

$$\therefore a \geq 3, b \leq -2$$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2이다.

$$\therefore m + M = 3 + (-2) = 1$$

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - (A - B) = A$ 이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① $A \subset B$

② $A^c \subset B^c$

③ $A - B = \emptyset$

④ $A \cup B = B$

⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

$$\begin{aligned} A - (A - B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$$\therefore A \cap B = A, \text{ 즉 } A \subset B$$

17. 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f(8) = 3f(2)$

해설

임의의 양수 x, y 에 대하여

$f(xy) = f(x) + f(y)$ 가 성립해야하므로

① $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

$\therefore$ 참

② $x = 2, y = 3$ 을 대입하면

$$f(6) = f(2) + f(3)$$

$\therefore$ 참

③ $x = x, y = x$ 를 대입하면

$$f(x^2) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

$$\therefore f(x^2) \neq f(2x)$$

$\therefore$ 거짓

④ $x = x, y = \frac{1}{x}$ 를 대입하면

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

① 에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$\therefore$ 참

⑤ $x = 4, y = 2$ 를 대입하면,

$$f(4 \times 2) = f(4) + f(2) \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $4 = 2 \times 2$ 이므로,

$$f(4) = f(2) + f(2) \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $f(8) = 3f(2)$

$\therefore$ 참

18. 다음 보기의 함수 중에서 일대일 대응인 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x^2 + 1$

㉡ $g(x) = -x + 1$

㉢ $h(x) = x^3$

㉤ $i(x) = 2$

㉥ $j(x) = |2x - 1| \quad (x \geq 1)$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

일대일 대응이란 정의역이 x 에 치역 y 가
하나씩 대응 될 때를 말한다.

㉠, ㉤ 일대일 대응이 아니다.

㉡ 함수가 아니다.

따라서 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢, ㉥ 3개이다.

19. 함수 $f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f(x) = \frac{bx+c}{x+d} \text{에 대하여}$$

$$\text{점근선이 } x = -2 \text{ 이므로 } f(x) = \frac{bx+c}{x+2}$$

$$\text{점근선이 } y = 4 \text{ 이므로 } f(x) = \frac{4x+c}{x+2}$$

이것이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

$$\therefore c = -7$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{4x-7}{x+2} \text{ 이므로}$$

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

20. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g \cdot f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = x$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = x$$

$\therefore g(1)$ 을 구하려면, $\frac{x+2}{2x-1} = 1$ 이 되어야 한다.

$$\Rightarrow x = 3 \quad \therefore g(1) = 3$$

21. A 가 집합일 때 $P(A)$ 를 $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$ 로 정의하기로 한다. 이때, 다음 중 옳은 것은?

① $A \subset P(A)$

② $\{A\} \subset P(A)$

③ $\{A\} \in P(A)$

④ $\{A\} = P(A)$

⑤ $A \notin P(A)$

해설

집합 A 는 집합 $P(A)$ 의 원소이므로 $A \in P(A)$

따라서 A 를 원소로 하는 부분집합 $\{A\}$ 는 $P(A)$ 의 부분집합이다.

$$\therefore \{A\} \subset P(A)$$

22. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 홀수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{ 이상 } 5 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 $X \subset A$, $B \subset X$ 이고 집합 X 의 원소의 개수가 5인 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{3, 5\}$$

$$X \subset A, B \subset X \text{ 이므로 } B \subset X \subset A$$

$$\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5는 반드시 포함하고 원소의 개수가 5개인 집합이므로

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\{1, 3, 5, 7, 11\}$, $\{1, 3, 5, 9, 11\}$, $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ 의 4개이다.

23. 집합 $A = \{x \mid 2 \leq x < a \text{인 자연수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 16개가 되기 위한 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$2^{n(A)} = 16 = 2^4 \quad \therefore n(A) = 4$$

$$A = \{2, 3, 4, 5\} = \{x \mid 2 \leq x < 6 \text{인 자연수}\}$$

$$\therefore a = 6$$

24. 전체집합 $U = \{3 \times x + 1 | x < 10, x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 A, B 가 있다.

$A^c \cap B^c = \{28\}$, $(A \cup B) - (A \cap B) = \{4, 10, 19, 25\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$U = \{3 \times x + 1 | x < 10, x \text{는 자연수}\} = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\} ,$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{28\} ,$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{4, 10, 19, 25\} ,$$

전체집합 U 는 $A - B$, $B - A$, $(A \cup B)^c$, $A \cap B$ 로 이루어지므로,
 $A \cap B = \{7, 13, 16, 22\}$ 이다.

$$\therefore n(A \cap B) = 4$$

25. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right)$ 의 최솟값을 다음과 같이 구하였다. 이 과정에서 최초로 잘못된 부분과 옳은 답을 구하면?

$$\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}} \times 2\sqrt{\frac{8y}{x}} : (가)$$

$$\left(\because x + \frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}}\right) : (나)$$

$$\left(\frac{1}{x} + 8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \times 8y}\right) : (다)$$

따라서 최솟값은 $4\sqrt{2}$: (라)

① (가), $4\sqrt{2} + 3$

② (나), $2 + 2\sqrt{2}$

③ (다), $3 + 2\sqrt{2}$

④ (라), $4 + 3\sqrt{2}$

⑤ (가), $3 + 2\sqrt{2}$

해설

$x > 0, y > 0$ 일 때

$$i) x + \frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

이 때, 등호는 $x = \frac{1}{4y}$, 즉 $xy = \frac{1}{4}$ 일 때 성립한다.

$$ii) \frac{1}{x} + 8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 8y} = 4\sqrt{\frac{2y}{x}}$$

이 때, 등호는 $\frac{1}{x} = 8y$, 즉 $xy = \frac{1}{8}$ 일 때 성립한다.

i), ii) 에서 등호가 성립하는 조건이 다르므로 (가)와 같이 나타낼 수 없다.

$$iii) \left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{4xy} + 8xy \geq 3 + 2\sqrt{\frac{1}{4xy} \cdot 8xy}$$

$$= 3 + 2\sqrt{2}$$

$\therefore$ 최솟값은 $3 + 2\sqrt{2}$