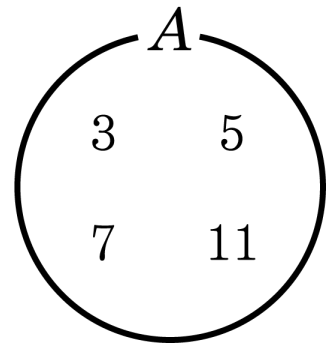
1. 다음 집합 A 를 조건제시법으로 나타내면?



① $\{x \mid x$는 11이하의 자연수$\}$

② $\{x \mid x$는 3이상 11이하의 소수$\}$

③ $\{x \mid x$는 11이하의 3의 배수$\}$

④ $\{x \mid x$는 2이상 12이하의 홀수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 11의 약수$\}$

해설

$\{3, 5, 7, 11\}$ 는 소수 중 3 이상이고 11 이하의 소수이다.
조건제시법으로 나타내면 $\{x \mid x$는 3 이상 11 이하의 소수$\}$ 이다.

2. 집합 $A = \{x \mid |x-1| = 1\}$, $B = \{x \mid 2x - 1 < 9\}$, $C = \{x \mid -3 < x < 3\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$

④ $B \subset C \subset A$ ⑤ $C \subset A \subset B$

해설

$|x-1| = 1, x-1 = \pm 1$ 이므로 $x = 0, 2$

$\therefore A = \{0, 2\}$

$B = \{x \mid 2x - 1 < 9\} = \{x \mid 2x < 10\} = \{x \mid x < 5\}$

$C = \{x \mid -3 < x < 3\}$

$\therefore A \subset C \subset B$

3. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2\}$ 에 대하여 $B \cup X = X$ 를 만족시키는 A 의 부분집합 X 의 개수를 구하시오.

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$B \subset X$ 이므로 X 는 1, 2 를 반드시 포함하여 $2^{6-2} = 2^4 = 16$(개) 가 된다.

4. 진수는 두 집합의 연산을 이용하여 새로운 집합을 만드는 탐구를 하다가 $A - B = \{1, 7\}$ 인 새로운 집합을 만든 원래의 두 집합 $A = \{1, 3, 5, b\}, B = \{2, a, 4, 5\}$ 를 발견하였다. 이 때, 원소 a, b 를 찾아 $b - a$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A - B \subset A$ 이고 $A - B = \{1, 7\}$ 이므로 $b = 7$ 이다. $A \cap B = \{3, 5\}$ 이므로 $a = 3$ 이다. 따라서 $b - a = 7 - 3 = 4$ 이다.

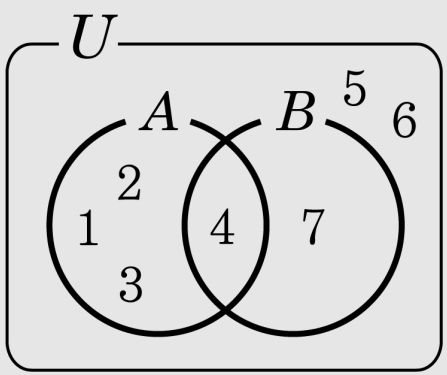
5. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{4, 7\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 은?

① $\{5, 6\}$ ② $\{6, 7\}$ ③ $\{4\}$

④ $\{5, 6, 7\}$ ⑤ $\{4, 5, 6\}$

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{1, 2, 3, 4, 7\})^c = \{5, 6\}$ 이다.



6. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 중 $(A-B)-C$와 같은 것은?

① $A-(B-C)$ ② $A-(B\cap C)$ ③ $A-(B\cup C)$

④ $A^c\cap B\cap C^c$ ⑤ $A\cap(B^c\cup C^c)$

해설

$A-B=A\cap B^c$ 이므로

$(A-B)-C=(A\cap B^c)-C$

$=(A\cap B^c)\cap C^c$

$=A\cap(B^c\cap C^c)$ ($\because$ 결합법칙)

$=(A\cap(B\cup C)^c$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)

$=A-(B\cup C)$ ($\because$ 차집합의 정의)

7. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다. $\sim p \to \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \to \sim q$이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \to \sim q$이 참이면 대우인 $q \to p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

8. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x-y+4z=3\sqrt{2}$일 때 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\{1+(-1)^2+4^2\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x-y+4z)^2$
$18(x^2+y^2+z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
$x^2+y^2+z^2 \geq 1$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 1이다.

9. 실수 전체의 집합을 R이라 할 때, 다음 중 R에서 R로의 함수가 될 수 없는 것은 무엇인가?

① $y = 0$　② $y = -x + 4$　③ $y = (x-1)^2$

④ $x = y^2 + 4$　⑤ $y = x^3$

해설

4일 때, $5 = y^2 + 4$, $y^2 = 1$에서 $y = \pm 1$
즉, $x = 5$에 대응하는 y의 값이
-1, 1의 두 개이므로 함수가 될 수 없다.

10. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a, 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

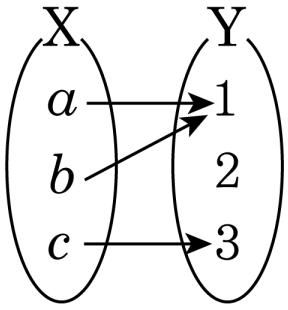
▶ 답 :

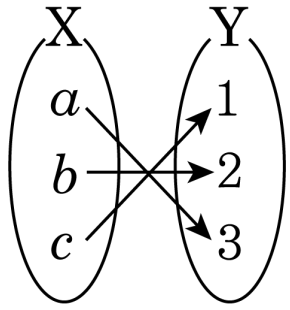
▷ 정답 : $a+b=64$

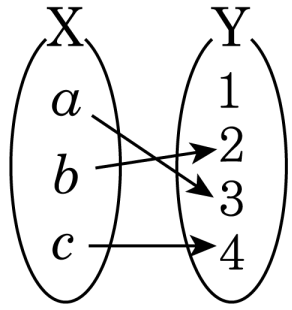
해설

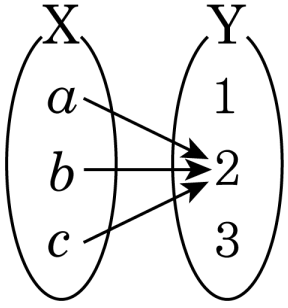
정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
$\therefore\ 4^3 = 64$
$\therefore\ a+b=64$

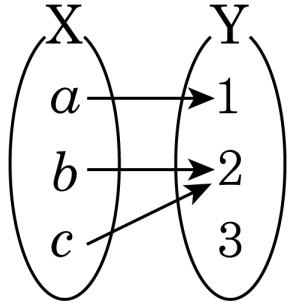
11. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?

① 

② 

③ 

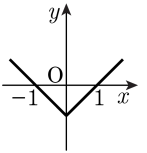
④ 

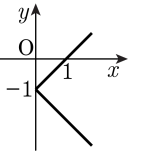
⑤ 

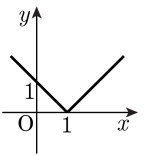
해설

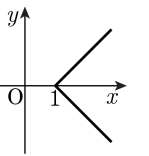
주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ② 번이다.

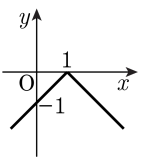
12. 다음 중 함수 $|y| = x - 1$ 의 그래프를 구하면?

① 

② 

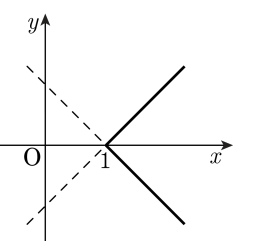
③ 

④ 

⑤ 

해설

$|y| = x - 1$ 에서
$y \geq 0$ 일 때,
$y = x - 1$
$y < 0$ 일 때,
$-y = x - 1,\ y = -x + 1$
따라서, 그래프는 다음
그림과 같다.



13. $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}+\dfrac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$=\frac{x-2}{(2x-3)(x-1)}+\frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)+(3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)}=2$$

14. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나눈다.

$$x + \frac{1}{x} - 5 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

15. 함수 $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3, y축 방향으로 1만큼 평행이동시켰더니 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프와 일치하였다. 이 때, abc의 값을 구하면?

① 8 ② 6 ③ 1 ④ -6 ⑤ -8

해설

$y=\dfrac{x+a}{(bx+c)}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3,

y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것은 반대로

$y=\dfrac{1}{x}$을 x축의 방향으로 -3만큼,

y축의 방향으로 -1만큼 이동시킨것과 같다.

$$y=\frac{1}{x+3}-1=\frac{-x-2}{x+3}=\frac{x+2}{-x-3}$$

따라서 $a=2, b=-1, c=-3$이므로

$\therefore abc=6$

16. 집합 $A = \{x | x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 3$, $B - A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 개수는?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

$A = \{3, 6, 9\}$, $n(A \cap B) = 3$ 이므로

$A \cap B = A$

$\therefore A \subset B$

$\therefore B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

그러므로 원소의 개수는 6 개이다.

17. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 13 이하의 짝수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x$는 8보다 작은 2의 배수$\}, B = \{x \mid x$는 4의 배수$\}$ 에 대하여 $(A \cup B)^c \subset X, (A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, A = \{2, 4, 6\}, B = \{4, 8, 12\}$ 이고
$(A \cup B)^c = \{10\}, (A - B)^c = \{4, 8, 10, 12\}$ 이다.
따라서 $(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$(개) 이다.

18. $0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이고, 필요조건이 $b+3 \le x \le 3$ 이다. a 의 최솟값을 m, b 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $m+M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m+M=-2$

해설

$0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이므로

$\{x \mid a-1 \le x \le 1\} \subset \{x \mid 0 \le x \le 2\}$

위의 그림에서 $0 \le a-1 \le 1$

$\therefore\ 1 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

또, $0 \le x \le 2$ 이기 위한 필요조건이

$b+3 \le x \le 3$ 이므로

$\{x \mid 0 \le x \le 2\} \subset \{x \mid b+3 \le x \le 3\}$

위의 그림에서 $b+3 \le 0$

$\therefore\ b \le -3 \cdots$ ㉡

㉠에서 a의 최솟값 $m=1$,

㉡에서 b의 최댓값 $M=-3$

$\therefore\ m+M=1+(-3)=-2$

19. 0이 아닌 실수 a에 대하여 $(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a})$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a}) = 144a^2+\frac{1}{a^2}+30 \geq 2\sqrt{144a^2\times\frac{1}{a^2}}+30 =$$

$$30+24 = 54$$

20. 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)-y=x-f(y)+1$을 만족시키는 함수 f에 대하여 $f(1)$의 값은 얼마인가?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$f(x)+f(y)=x+y+1$

$x=y=1$일 때, $f(1)+f(1)=3$

따라서 $f(1)=\frac{3}{2}$

21. 함수 $f(x)=\begin{cases}2(x\geq 1)\\1(x<1)\end{cases}$ 에서 $y=(f\circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x\geq 1 : y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2$

ii) $x<1 : y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=2$

$\therefore\ y=(f\circ f)(x)=2$

22. $6-\sqrt{3}$의 정수 부분을 x, 소 수부분을 y라 할 때 $\frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$6-\sqrt{3}=4+(2-\sqrt{3})\ (\because 0<2-\sqrt{3}<1\ )$

$\therefore x=4,\ y=2-\sqrt{3},\ \frac{1}{y}=2+\sqrt{3}$

$\therefore y+\frac{1}{y}=4,$

$y^3+\frac{1}{y^3}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^3-3\left(y+\frac{1}{y}\right)=52$

$\therefore \frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=\frac{1}{4}\cdot 52=13$

23. 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프는 점 (a,b) 에 대해 대칭인 그래프이다. 이때 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ -3 ⑤ -1

해설

함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프가 점 (a,b) 에서

대칭이므로 $x=a,\ y=b$ 를 점근선으로 한다.

$$y=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$$

따라서 $a=1,\ b=2$ 이므로

$\therefore a+b=1+2=3$

24. 유리함수 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(0,2)$ 를 지나고 두 직선 $x=-1,\ y=3$ 을 점근선으로 가질 때 $a+b+c$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x=-1, y=3$이 점근선 이므로

$$y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{k}{x+1}+3$$

점 $(0,2)$를 지나므로 $k=-1$

$$\therefore y=\frac{-1}{x+1}+3=\frac{-1+3x+3}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}$$

이 함수가 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$ 와 일치해야 하므로

$a=1,\ b=3,\ c=2$

$\therefore a+b+c=6$

25. $1 \le x \le a$ 일 때, $y = \sqrt{2x-1} + 3$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. $a + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \le x \le a$ 에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1} + 3$ 은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1} + 3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$ 일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1} + 3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a + m = 9$