1. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \cdots, 100\}$, $B = \{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$ 에 대하여 $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 59

해설

$100 \div 2 = 50$ 이므로 $n(A) = 50$, $B = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ 이므로 $n(B) = 9$

따라서 $n(A) + n(B) = 50 + 9 = 59$ 이다.

2. 집합 $A=\{1,\ 3\}$ 에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing$ 는 집합 A 의 부분집합이다.

② 원소가 하나뿐인 집합 A 의 부분집합은 2 개이다.

③ 원소가 3 개인 집합 A 의 부분집합은 없다.

④ $\{1,\ 3\}$ 은 집합 A 의 진부분집합이다.

⑤ $\{1\}\subset A$ 이다.

해설

집합 A 의 진부분집합은 부분집합 중 $\{1,\ 3\}$ 을 제외한 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$ 이다.

3. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소는 포함하지 않는 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{0\}$

▷ 정답 : $\{0,\ 1\}$

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소 2를 포함하지 않는 부분집합을 원소의 개수별로 차례대로 구하면 $\{0\}$, $\{0, 1\}$ 이다

4. 미란이는 두 집합의 연산을 이용하여 새로운 집합을 만드는 탐구를 하다가 $A - B = \{2, 6\}$ 인 새로운 집합을 만든 원래의 두 집합 $A = \{2, 3, 4, b\}$, $B = \{3, a, 5, 7\}$ 을 발견하였다. 이 때, 원소 a, b 를 찾아 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 10$

해설

$A - B \subset A$ 이고 $A - B = \{2, 6\}$ 이므로 $b = 6$ 이다. $A \cap B = \{3, 4\}$ 이므로 $a = 4$ 이다. 따라서 $a + b = 10$ 이다.

5. 다음 (　　　　)안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 (　　　　)조건이다.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

6. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

7. 양수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$a^2>$, $b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a^2}>0$, $\frac{1}{b^2}>0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$

$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

8. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$를 $f(x) = |x|$라 하자. 이때 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2$이므로 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$(개)이다.

9. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x))=x$ 이고 $g(1)=0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면
$g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.
모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x))=x$ 이므로
양변의 차수를 비교하면 $n^2=1$
$\therefore n=1$ ($\because$ n 은 자연수)
즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로
$g(x)=ax+b$ 라 하면 $g(1)=0$ 이므로
$a+b=0$, 즉 $b=-a$
$\therefore g(x)=ax+b=ax-a$
$g(g(x))=g(ax-a)=a(ax-a)-a$
$=a^2x-a^2-a=x$
이 식은 x 에 대한 항등식이므로
$a^2=1$, $-a^2-a=0$
$\therefore a=-1$
즉, $g(x)=-x+1$ 이므로 $g(-1)=2$

10. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a의 값을 정하면?

① -1　　② 1　　③ -2　　④ 2　　⑤ 0

해설

$y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 에서 $y(x-1)=ax+1$

$yx-y=ax+1,\ yx-ax=1+y$

$x(y-a)=1+y,\ x=\dfrac{1+y}{y-a}$

$\therefore\ y^{-1}=\dfrac{x+1}{x-a}$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$\dfrac{x+1}{x-a}=\dfrac{ax+1}{x-1}$

$\therefore a=1$

11. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P-Q=\varnothing$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.

⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P-Q=\varnothing$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

12. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여 $f(f(f(x))) = x$가 되는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여

$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$

$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$

$f(f(f(x))) = x$이므로 $8x - 21 = x$

$\therefore x = 3$

14. 함수 f 에 대하여 역함수 f^{-1} 가 존재하고, 임의의 실수 x ,y 에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 가 성립할 때, 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $f(0)=0$

② $f^{-1}(0)=0$

③ $f(2)=1$ 이면 $f(3)=\frac{3}{2}$

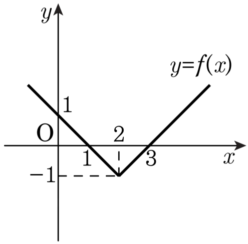
④ $f^{-1}(2)=1$ 이면 $f(4)=6$

⑤ $f^{-1}(x+y)=f^{-}1(x)+f^{-1}(y)$

해설

① $f(0+0)=f(0)+f(0)$ 이므로$f(0)=2f(0)$
$\therefore f(0)=0$ (참)
② ①에서 $f(0)=0$ 이므로 $f^{-1}(0)=0$ (참)
③ $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$
$f(2)=1$ 이므로 $f(1)=\frac{1}{2}$
$\therefore f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)$
$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (참)
④ $f^{-1}(2)=1$ 이므로 $f(1)=2$
$\therefore f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=4$
$\therefore f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)=8$ (거짓)
⑤ $f^{-1}(x)=a$, $f^{-1}(y)=b$ 라 하면
$f(a)=x$, $f(b)=y$
$\therefore f(a+b)=f(a)+f(b)=x+y$
$\therefore f^{-1}(x+y)=a+b=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ (참)

15. 함수 $f(x) = |x-2|-1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(0)=0$
㉡ $f(x)=0$ 이면 $x=1$ 또는 $x=3$
㉢ $f(x)<0$ 이면 $1<x<3$
㉣ $a<b<2$ 이면 $f(a)>f(b)$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $f(0)=1$
㉡ $f(1)=0,\ f(3)=0$ 이므로
$f(x)=0$ 이면 $x=1$ 또는 $x=3$
㉢ $f(x)<0$ 이면 그래프가
x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1<x<3$
㉣ $x<2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
$a<b<2$ 이면 $f(a)>f(b)$
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

16. $x+y=6,\ xy=4$(단, $x>y$) 일 때, $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ 의 값은?

① $\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$ ② $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$x+y=6,\ xy=4\ (x>y)$ 이면

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=36-16=20$

$\therefore\ x-y=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ (\because\ x>y)$

$$(준\ 식)=\frac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

$$=\frac{\sqrt{20}^3+3\cdot4\cdot\sqrt{20}}{6^3-3\cdot4\cdot6}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

17. 유리식 $\dfrac{2b+c}{3a}=\dfrac{c+3a}{2b}=\dfrac{3a+2b}{c}$의 값을 k_1, k_2라 할 때, k_1+k_2의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\frac{2b+c}{3a}=\frac{c+3a}{2b}=\frac{3a+2b}{c}=k$$라 하면

(i) $3a+2b+c\neq 0$일 때,

$$k=\frac{6a+4b+2c}{3a+2b+c}=2$$

(ii) $3a+2b+c=0$일 때,

$$k=\frac{3a+2b}{c}=\frac{-c}{c}=-1$$

$\therefore \{k_1,\ k_2\}=\{2,\ -1\}$

$\therefore k_1+k_2=1$

18. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 5개　⑤ 6개

해설

$2-x \geq 0,\ \ x+3>0$

$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

19. $-1 < a < 3$일 때, $\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-6a+9}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(준식) $= \sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$
$=|a+1|+|a-3|=(a+1)-(a-3)=4$

20. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분이 a, 소수 부분이 b라 할 때, $\frac{1}{b}-a$ 의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$　⑤ $3-\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=3-\sqrt{3}$
따라서 $a=1,\ b=2-\sqrt{3}(\because 1<\sqrt{3}<2)$
$\therefore \frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=1+\sqrt{3}$

21. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2,\ y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

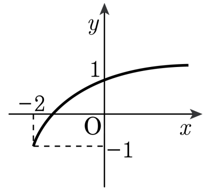
$1 = \dfrac{12+c}{3+2}$

$\therefore\ c = -7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$f(1) = \dfrac{-3}{3} = -1$

22. 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$　　② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$

③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$　　④ $(-\sqrt{2},\ 0)$

⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b = 2$, $c = -1$
$\therefore\ y = a\sqrt{x+b}+c = a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$
$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x+2 = \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ x = -\frac{3}{2}$$

23. 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1<k<0$　② $-1<k\le 0$　③ $0<k<\frac{1}{2}$

④ $0\le k<\frac{1}{2}$　⑤ $0<k\le\frac{1}{2}$

해설

$x\ge 0$일 때 $y=\sqrt{2x}$이고 $x<0$일 때

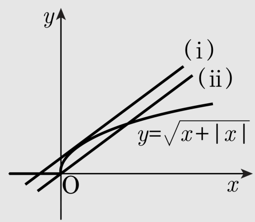
$y=0$이므로

$y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프는

그림과 같고 직선 $y=x+k$와 서로 다른

세 점에서 만나려면

(i)과 (ii)사이에 존재해야 한다.



① 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x}=x+k$에서 $2x=(x+k)^2$

$x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0,\quad -2k+1=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}$$

② 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$

①, ②에서 구하는 k의 값의 범위는 $0<k<\frac{1}{2}$

24. 다음 중에서 $\{(A-B)\cup A^c\}\cap\{(A\cap B^c)\cup B\}$와 같은 집합이 <u>아닌</u> 것은?

① $(A\cup B)-(A\cap B)$ ② $(A\cup B)\cap(A^c\cup\beta^c)$

③ $(A-B)\cup(B-A)$ ④ $(A\cup B^c)\cap(A^c\cup B)$

⑤ $(A\cap B)^c\cap(A\cup B)$

해설

$$\{(A-B)\cup A^c\}\cap\{(A\cap B^c)\cup B\}$$
$$=\{(A\cap B^c)\cup A^c\}\cap\{(A\cap B^c)\cup B\}$$
$$=(A^c\cup B^c)\cap(A\cup B)$$
$$=(A\cap B)^c\cap(A\cup B)$$
$$=(A\cup B)-(A\cap B)$$
$$=(A-B)\cup(B-A)$$

25. 미영이네 반 학생들에 대하여 수학, 영어 두 과목에 대한 선호도 조사를 실시하였다. 그 결과 수학을 좋아하는 학생은 36명, 영어를 좋아하는 학생은 27명이었고, 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생은 15명이었다. 이 때, 수학 또는 영어 한 과목만 좋아하는 학생은 몇 명인가?

① 27명 ② 30명 ③ 33명 ④ 36명 ⑤ 39명

해설

수학을 좋아하는 학생의 집합을 A, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면 $n(A) = 36,\ n(B) = 27,\ \ n(A \cap B) = 15$이므로
$n(A \cup B) = 36 + 27 - 15 = 48$
따라서 수학 또는 영어 한 과목만을 좋아하는 학생 수는 $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 48 - 15 = 33$ (명)

26. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r}$, $H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 a, b에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$

따라서 (다) 필요충분조건

27. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

해설

$f(-1)=f(1), f(0)=f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5\times 5=25$ (가지)

28. 두 함수 $f(x)=4x+1$, $g(x)=2x+3$ 에 대하여 $\left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x)=4x+1$, $g(x)=2x+3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g &= g\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ g \\ &= \left(g\circ g^{-1}\right)\circ f^{-1}\circ g \\ &= f^{-1}\circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2) &= (f^{-1}\circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1)=a$ 라고 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$4a+1=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)=-\frac{1}{2}$

29. A, B 두 자동차의 연비 (연료 1 l 로 갈 수 있는 거리 : km/l)의 비는 5 : 6 이고, 연료 탱크의 용량의 비는 4 : 3 이다. 이 두 대의 자동차에 연료를 가득 채우고 120 km 를 달린 후의 A, B 두 차에 남아 있는 연료의 비는 7 : 5 이었다. A 자동차가 연료를 가득 채우고 갈 수 있는 총거리는?

① 300 km ② 350 km ③ 400 km

④ 450 km ⑤ 500 km

해설

	A	B
연비(km/l)	$5k$	$6k$
연료 탱크의 용량(l)	$4m$	$3m$
소요된 연료(l)	$\frac{120}{5k}$	$\frac{120}{6k}$

$$\left(4m-\frac{120}{5k}\right) : \left(3m-\frac{120}{6k}\right)=7 : 5$$

$\therefore\ mk=20$

따라서, A 자동차가 연료 4 m 으로 갈 수 있는 총거리는

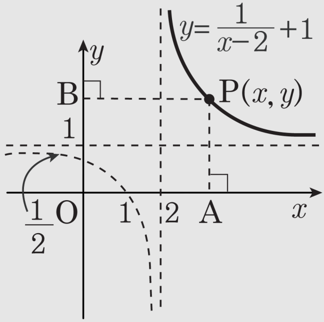
$5k\times 4m=20mk=400(\text{km})$

30. 분수함수 $y = \dfrac{1}{x-2} + 1(x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{\mathrm{PA}} = y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ $\overline{\mathrm{PB}} = x(x > 2)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}} = x + \dfrac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \dfrac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \dfrac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \dfrac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

31. 집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 홀수가 하나만 속하는 것을 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_n$이라 하고, $A_k(k=1,\ 2, \cdots, n)$의 원소의 합을 S_k라고 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$의 값은?

① 216　② 240　③ 672　④ 696　⑤ 728

해설

집합 S 에 홀수 1, 3, 5 가 있으므로 홀수를 하나만 포함하는 부분집합의 개수를 구할 때,1을 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$ ㉠

3을 포함하고 1, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$ ㉡

5를 포함하고 1, 3 을 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$ ㉢

이므로 모두 24 개이다. 이 24개의 부분집합의 열을 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_{24}$ 라 하면 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_{24}$ 에는 S 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 이 각각 몇 개씩 들어갈까? 우선 1 을 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개이므로 1이 8번 들어가는 것은 분명하다. 그러면 3, 5 는 들어가지 않으니 문제 삼지 말고 2, 4, 6 은 몇 번 들어갈까?

구체적으로 나열하면$\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,4,6\}$, $\{1,2,4,6\}$이 되어 2, 4, 6 은 각각 4번씩 들어간다. 따라서 ㉠의 8개의 집합 안에는 1이 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩㉡의 8개의 집합 안에는 3이 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩㉢의 8개의 집합 안에는 5가 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩 들어가므로

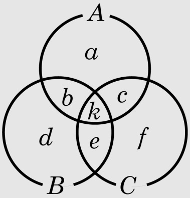
$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{24}=8(1+3+5)+12(2+4+6)=216$

그런데, 여기서 원소의 총합에 대한 규칙성을 발견해 보면 2, 4, 6 이 각각 4번씩 나오는데 그 이유를 알아보자.1을 반드시 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합 중에서 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 1, 2, 3, 5 를 제외한 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-4}=4$ (개) 이다.

32. 집합 X, Y 에 대하여 연산 ★ 를 $X★Y=(X\cup Y)-(X\cap Y)$ 로 정의하고, 세 집합 A, B, C 가 $n(A\cup B\cup C)=45$, $n(A★B)=18$, $n(B★C)=22$, $n(C★A)=24$ 를 만족할 때, $n(A\cap B\cap C)$ 의 값을 구하면?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설



$n(A\cap B\cap C)=k$

$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+d+e+f+k$

$=45 \cdots$ ㉠

$n(A★B)=a+c+d+e=18 \cdots$ ㉡

$n(B★C)=b+d+c+f=22 \cdots$ ㉢

$n(C★A)=a+b+e+f=24 \cdots$ ㉣

㉡ + ㉢ + ㉣ $=2(a+b+c+d+e+f)=64$

$\therefore\ a+b+c+d+e+f=32 \cdots$ ㉤

㉤을 ㉠에 대입하면 $\therefore\ k=13$

33. 두 조건 p, q를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a+1\}$, $Q = \left\{x \,\middle|\, x + \frac{1}{x} \le -2\right\}$에 대하여 $p \to q$를 참이 되게하는 실수 a의 최댓값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

(i) $x < 0$이면

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$$

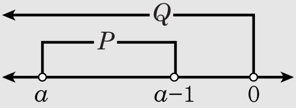
$\therefore \quad x + \frac{1}{x} \le -2$

(ii) $x > 0$이면

$x + \frac{1}{x} \ge 2$이므로 Q를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $Q = \{x | x < 0\}$

$\therefore \quad P \subset Q$에서 $a + 1 \le 0$, $a \le -1$



따라서, $p \to q$를 참이 되게 하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.