

1. 다음 중 주어진 조건에 의해 그 대상을 분명히 알 수 있는 것이 아닌 것을 모두 고르면?

① 2 보다 작은 짝수의 모임

② 암기력이 좋은 사람들의 모임

③ 분자가 3 인 분수의 모임

④ 4 보다 작은 4 의 배수의 모임

⑤ 작은 수들의 모임

해설

② ‘암기력이 좋은’ 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

⑤ ‘작은’ 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

2. 다음 중 옳은 것은?

보기

㉠ $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이면 $6 \in A$ 이다.

㉡ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$ 이면 $A \subset B$ 이다.

㉢ $a \subset \{a, b, c\}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉡ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$ 이면
 $B \subset A$ 이다.

㉢ $a \in \{a, b, c\}$

3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, $B \subset A$ 이고, $A \neq B$ 인 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 15 개

해설

$B \subset A$ 이고, $A \neq B$ 인 집합 B 는 집합 A 의 진부분집합이다.
따라서 집합 B 의 개수는 (집합 A 의 부분집합의 수) -1 (개)가 된다.
따라서 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개)이다.

4. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 약수}\}$ 에서 집합 B 의 원소를 포함하는 A 의 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 3\}$

▷ 정답 : $\{1, 2, 3\}$

해설

집합 B 를 원소나열법으로 나타내면 $B = \{1, 2, 3\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중 $1, 3$ 을 원소로 포함하는 부분집합을 구하면 $\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 이다.

5. 세 집합 사이에 $\{1, 2, 3\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 를 만족하는 집합 A 가 될 수 있는 것은?

① $\{1, 2\}$

② $\{1, 2, 3\}$

③ $\{1, 2, 4\}$

④ $\{2, 3, 4\}$

⑤ $\{1, 3, 4\}$

해설

① $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2\}$

③ $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 4\}$

④ $\{1, 2, 3\} \not\subset \{2, 3, 4\}$

⑤ $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 3, 4\}$

6. 두 집합 $A = \{a, 8\}$, $B = \{1, 4, b\}$ 가 다음을 만족할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

$$A \cap B = \{4, 8\}$$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 집합 A, B 는 $A \cap B$ 를 포함한다.

$A \cap B = \{4, 8\}$ 이므로 $\{4, 8\} \subset \{a, 8\}$, $\{4, 8\} \subset \{1, 4, b\}$ 이다.

따라서 $a = 4, b = 8$ 이므로 $\frac{b}{a} = \frac{8}{4} = 2$ 이다.

7. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 12\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

$$\therefore n(A \cup B) = 9$$

8. 두 집합 $C = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, $D - C$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{6, 12\}$

해설

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, D \cap C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D - C = D - (D \cap C) = \{6, 12\}$$

9. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cap B) = 15$, $n(B) = 37$, $n(U) = 60$ 을 만족할 때 $n(A^c \cap B)$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

해설

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B) &= n(B \cap A^c) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 37 - 15 \\ &= 22 \end{aligned}$$

10. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$$

$$\therefore a = -3$$

11. 세 집합

$$A = \{w, x, y, z\},$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{ 미만의 } 30 \text{의 약수}\},$$

$$C = \{x \mid x \text{는 } 25 \text{ 이하의 소수}\} \text{ 일 때,}$$

$n(A) + n(B) + n(C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

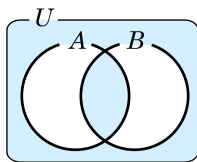
해설

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$$

$$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$$

$$\therefore n(A) + n(B) + n(C) = 4 + 7 + 9 = 20$$

12. 다음 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ ② $(A \cup B) \cup (A \cap B)$
③ $(A \cap B) \cup (A^c - B^c)$ ④ $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c)$
⑤ $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

해설

벤다이어그램은 $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 을 나타낸다. $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

13. 다음 중 ‘모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.’의 부정인 명제를 고르면?

- ① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.
- ② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.
- ③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.
- ④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.
- ⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) $\Rightarrow$ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

14. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건

② 필요조건

③ 대우

④ 필요충분조건

⑤ 아무조건도 아니다.

해설

정삼각형 $\subset$ 이등변삼각형

15. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\
 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\
 &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\
 &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\
 &\therefore |a| + |b| \geq |a + b|
 \end{aligned}$$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\
 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \text{ (③이 쓰임)} \\
 &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\
 &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \text{ (①이 쓰임)} \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \text{ (④가 쓰임)} \\
 &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \text{ (⑤가 쓰임)} \\
 &\text{따라서, ②는 쓰이지 않았다.}
 \end{aligned}$$

16. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

17. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \rightarrow 1$

② $x \rightarrow |x|$

③ $x \rightarrow x^2 + 1$

④ $x \rightarrow 2x$

⑤ $x \rightarrow x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

18. 자연수 전체의 집합 N 에 대하여 함수 $f : N \rightarrow N$ 을 $f(n) = (n \text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정의한다. 이 때, 집합 $A = \{n | f(n) = 2\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

① $1 \in A$

② $2 \in A$

③ $4 \in A$

④ $6 \in A$

⑤ $10 \in A$

해설

$f(n) = 2$ 란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

19. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3

② 6

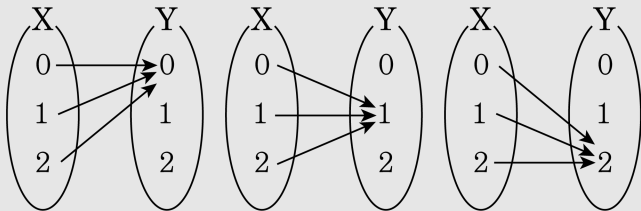
③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

20. 함수 $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 1$) 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x$ ($x \geq 1$)

② $y = x^2 - 2x$ ($x \leq 1$)

③ $y = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)

④ $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1$ ($x \leq 1$)

해설

$$y = x^2 - 2x \text{에서 } x^2 - 2x + 1 = y + 1$$

$$(x-1)^2 = y+1, x-1 = \sqrt{y+1} \quad (\because x \geq 1)$$

$$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \sqrt{x+1} + 1$$

이 때, 원래의 함수

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geq 1) \text{의 치역 } \{y | y \geq -1\} \text{ 이}$$

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 의 정의역이 되므로
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

21. 함수 $f(x) = |4x + a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x + a| + b = \left| 4 \left(x + \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향

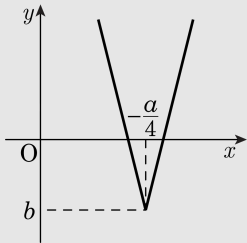
으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음
그림과 같다.

따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3, b = -2$

따라서 $a = -12, b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$



22. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

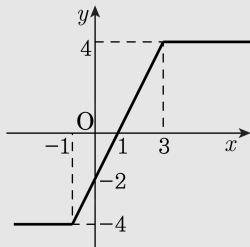
$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$



23. $\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3x}$

해설

$$\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x} = \frac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \frac{2}{3x}$$

24. $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{2}{x(x+2)}$

② $\frac{3}{x(x+2)}$

③ $\frac{2}{(x+2)(x+3)}$

④ $\frac{3}{(x+2)(x+3)}$

⑤ $\frac{3}{x(x+3)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x(x+3)}\end{aligned}$$

25. $a < 0$, $b < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

② $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

해설

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b} = \sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

26. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(2) = 3 \text{ 에서 } f(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a+b=4 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \quad \therefore ab = 1$$

27. $y = \sqrt{4x - 12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 a , y 축으로 b 만큼 평행이동한 것이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x - 3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한
그래프의 함수이다.

즉, $a = 3$, $b = 5$

$\therefore a + b = 8$

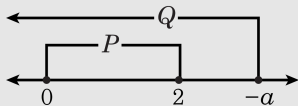
28. 실수 x 에 대한 두 조건 $p : 0 \leq x \leq 2$, $q : x + a \leq 0$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

p , q 를 만족하는 집합을 각각 P , Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x | x \leq -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$ 하려면 $2 \leq -a$, $a \leq -2$ 따라서 a 의 최댓값은 -2

29. $x \geq a$ 가 $x^2 - 4 < 0$ 의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$ 가 $-2 < x < 2$ 의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2 이다.

30. $f \circ f$ 를 f^2 , $f \circ f \circ f$ 를 f^3 과 같이 나타낼 때, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 이면 $f^3(2)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1}$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x$$

$$\begin{aligned}\therefore f^3(x) &= (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) \\ &= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

$$\therefore f^3(2) = 2$$

31. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$

㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$

㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.

㉡ $y = |x - 2|$ 에서 $y = 1$ 이면
 $x = -1, 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
 $x = \pm 2$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.

이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.

㉠ $x_1 \neq x_2$ 일 때,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

㉣ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

32. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \frac{1}{x^{101}}$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ -2

④ 2

⑤ 101

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$(\text{주어진 식}) = (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2}$$

$$= -x^2 - \frac{1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$= -\frac{-x + 1}{x^2} = \frac{x - 1}{x^2} = 1$$

33. $a+b = \frac{b+c}{2} = \frac{c+a}{3}$ 일 때, $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ 의 값은? (단, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$)

① $\frac{5}{6}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{2}{5}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ 3

해설

$$a+b = \frac{b+c}{2} = \frac{c+a}{3} = k \text{라 두면}$$

$$a+b = k, b+c = 2k, c+a = 3k$$

$$a+b+c = 3k$$

$$a = k, b = 0, c = 2k$$

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2k^2}{5k^2} = \frac{2}{5}$$

34. 어떤 오렌지 주스 제조 공장에서 오렌지 주스 원액 $w\%$ 가 포함되어 있는 100kL 의 혼합 주스가 있다. 지금 여기에 오렌지 주스 원액 $y\%$ 가 포함되어 있는 x kL 의 혼합 주스를 섞어 원액 $z\%$ 가 들어 있는 혼합 주스를 만들려고 한다. 이때, x 의 값을 나타내는 식을 고르면?

① $\frac{100(100z - w)}{y}$

② $\frac{100(100z - w)}{y + 100z}$

③ $\frac{10000z}{y + 100w}$

④ $\frac{100(z - w)}{y - z}$

⑤ $\frac{(z - w)}{100(y - z)}$

해설

원액의 전체의 양은 $w + \frac{xy}{100}$ kL

또, 혼합 주스 전체의 양은 $100 + x$ kL

$$\therefore \frac{z}{100} = \frac{w + \frac{xy}{100}}{100 + x} \Leftrightarrow x = \frac{100(z - w)}{y - z}$$

35. $\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{1}{b} - a$ 의 값은?

① $1 - \sqrt{3}$

② $1 + \sqrt{3}$

③ $2 - \sqrt{3}$

④ $2 + \sqrt{3}$

⑤ $3 + \sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{27}} = 3 - \sqrt{3}$$

$$1 < \sqrt{3} < 2, -2 < -\sqrt{3} < -1, 1 < 3 - \sqrt{3} < 2$$

$$a = 1, b = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{b} - a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - 1 = 2 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} + 1$$

36. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$ 일 때, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ 의 값을 구하면?

① 202

② 204

③ 206

④ 208

⑤ 210

해설

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} = x$$

$$\begin{aligned}\sqrt{17-12\sqrt{2}} &= \sqrt{17-2\sqrt{72}} = \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} = y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 &= x^2(x+y) + y^2(x+y) \\ &= (x+y)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

각각 x , y 를 대입하여 계산한다.

$$(x+y)(x^2+y^2) = 34 \times 6 = 204$$

37. 분수함수 $y = \frac{x+k-1}{x-1}$ ($k \neq 0$) 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 치역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.
- ② $(1, 1)$ 에 대하여 대칭이다.
- ③ $|k|$ 가 클수록 곡선은 $(1, 1)$ 에 가까워진다.
- ④ 점근선은 $x = 1, y = 1$ 이다.
- ⑤ $y = -x + 2$ 에 대하여 대칭이다.

해설

- ① 정의역은 $x \neq 1$ 인 실수, 치역은 $y \neq 1$ 인 실수
- ② 점근선의 교점인 $(1, 1)$ 에 대해 대칭이다.
- ③ $|k|$ 가 커질 수록 $(1, 1)$ 에 멀어진다.
- ⑤ 기울기가 ± 1 이고 $(1, 1)$ 을 지나는 직선에 대칭이다.

38. $y = \frac{x+a}{x+1}$ 의 그래프를 x 축 및 y 축의 방향으로 평행이동 하면 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐질 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+a}{x+1} = \frac{x+1+a-1}{x+1} = 1 + \frac{a-1}{x+1} \text{ 을 평행이동하여}$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ 과 겹치려면 } a-1=1$$

$$\therefore a=2$$

39. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나고 두 직선 $x = -1$, $y = 3$ 을 점근선으로 가질 때 $a + b + c$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$x = -1, y = 3$ 이 점근선 이므로

$$y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{k}{x+1} + 3$$

점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $k = -1$

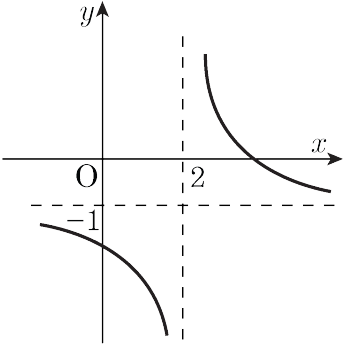
$$\therefore y = \frac{-1}{x+1} + 3 = \frac{-1 + 3x + 3}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$$

이 함수가 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 와 일치해야 하므로

$$a = 1, b = 3, c = 2$$

$$\therefore a + b + c = 6$$

40. 분수함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y = \sqrt{cx+a} + b$ 의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



- ① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면
 ④ 제4사분면 ⑤ 제1,2사분면

해설

$y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 점근선은 $x = -a$, $y = c$

그림에서 $-a > 0$, $c < 0$ 이고, $b > 0$

$\therefore a < 0$, $b > 0$, $c < 0 \cdots \textcircled{1}$

한편 $y = \sqrt{cx+a} + b = \sqrt{c\left(x + \frac{a}{c}\right)} + b$ 이므로

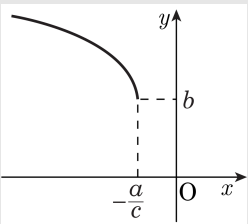
$$c\left(x + \frac{a}{c}\right) \geq 0$$

이때 $c < 0$ 이므로 $x \leq -\frac{a}{c}$

$\textcircled{1}$ 에서 $-\frac{a}{c} < 0$ 이므로 $x < 0$

또 $y = \sqrt{cx+a} + b \geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

41. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 5)\}$$

$$A \times C = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$$

$$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$$

$$\text{따라서 } n((A \times B) \cap (A \times C)) = 0$$

42. 등식 $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ 를 증명하는 데 꼭 필요한 것을 다음 중에서 모두 고르면?

㉠ 교환법칙

㉡ 결합법칙

㉢ 분배법칙

㉣ 흡수법칙

㉤ 드 모르간의 법칙

㉥ $X - Y = X \cap Y^c$

① ㉡, ㉢, ㉥

② ㉠, ㉡, ㉢, ㉥

③ ㉢, ㉤, ㉥

④ ㉡, ㉢, ㉣, ㉥

⑤ ㉡, ㉢, ㉤, ㉥

해설

$$(A - B) - C = (A \cap B^c) - C \cdots \text{㉥}$$

$$= (A \cap B^c) \cap C^c \cdots \text{㉡}$$

$$= A \cap (B^c \cap C^c) \cdots \text{㉡}$$

$$= A \cap (B \cup C)^c \cdots \text{㉤}$$

$$= A - (B \cup C) \cdots \text{㉥}$$

따라서 ㉡, ㉤, ㉥이다.

43. 네 개의 조건 p, q, r, s 에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$ 라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$

② $p \Rightarrow \sim r$

③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$

⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$$

$$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$$

$$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$$

44. 지성이는 자기 반 학생 35명의 키와 몸무게를 조사하여 ‘키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.’ 라는 결론을 내렸다. 다음 <보기> 중 지성의 결론이 참인지 알아보기 위해 반드시 확인해야 할 것을 모두 고르면?

- ㉠ 키가 180cm인 학생의 몸무게
- ㉡ 키가 170cm인 학생의 몸무게
- ㉢ 몸무게가 70kg인 학생의 키
- ㉣ 몸무게가 60kg인 학생의 키

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

지성이의 결론 ‘키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.’가 참이면 키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 반드시 65kg 이상이어야 하므로 키가 180cm인 학생의 몸무게가 65kg 이상인지 반드시 확인해야 한다. 또한, 지성이의 결론이 참이면 결론의 대우 ‘몸무게가 65kg 미만인 학생의 키는 175cm 미만이다.’도 참이므로, 몸무게가 60kg인 학생의 키가 175cm 미만인지 확인해야 한다.

∴ ㉠, ㉣

45. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q, r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$

② $q \Rightarrow r$

③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$

⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$ 가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

46. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(1) = 1$

② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③ $f(a^2) = 2f(a)$

④ $f(a^n) = nf(a)$

⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x, a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수

47. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10

② -5

③ 1

④ 5

⑤ 11

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$$

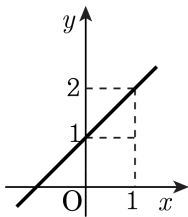
$\vdots$

$$(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x - 10$$

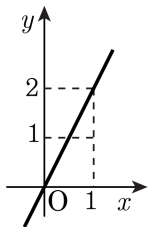
밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

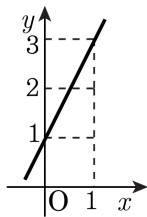
48. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



가



나



다

다음 중 $w(x)$ 를 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

- ① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f + g$ ⑤ $f - g$

해설

그래프를 보고 함수식을 구하면

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $w(x) = 2x + 1$ 이다.

$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로

$\therefore w = f \circ g$

49. 분수함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

I. $f(0) = g(0) = -1$

II. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.

III. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① I

② I, II

③ I, III

④ II, III

⑤ I, II, III

해설

I. $f(0) = -1, g(0) = \frac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

II. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{f(x)}$$

$= g(x)$ -<참>

III. $y = f(x-1) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$

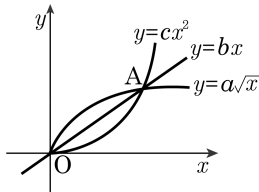
따라서, 점근선은 $x=0, y=1$

$$y = g(x+1) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

따라서 점근선은 $x=0, y=1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (I), (II), (III) 이다.

50. 양의 상수 a, b, c 에 대하여 세 함수 $y = a\sqrt{x}$, $y = bx$, $y = cx^2$ 의 그래프가 그림과 같이 원점 O 와 다른 점 A 에서 동시에 만날 때, a, b, c 의 관계로 옳은 것은?



① $a^3 = b^2c$

② $a^3 = bc^2$

③ $b^3 = a^2c$

④ $b^3 = ac^2$

⑤ $c^3 = a^2b$

해설

곡선 $y = cx^2$ 과 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표 (단, $x \neq 0$)는 $cx^2 = bx$

$$\therefore x = \frac{b}{c}$$

곡선 $y = a\sqrt{x}$ 와 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표 (단, $x \neq 0$)는

$$a\sqrt{x} = bx \therefore x = \frac{a^2}{b^2}$$

두 점이 일치하므로 $\frac{b}{c} = \frac{a^2}{b^2}$

$$\therefore b^3 = a^2c$$