

1. $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x = a$, $y = b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 2$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+1}{2x-1} \\ &= \frac{3\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad a + b = 2$$

2. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ 이므로 } f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2} \text{ 의}$$

역함수를 구하면

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4$$

$$\therefore 2+3+4=9$$

3. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2, g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$$

4. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a 와 b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

- 1) $a > 0$ 일 때 $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$ 을 만족
 $-a + b = -1$, $3a + b = 3$
따라서 $a = 1$, $b = 0$
- 2) $a < 0$ 일 때 $f(-1) = 3$, $f(3) = -1$
 $-a + b = 3$, $3a + b = -1$
따라서 $a = -1$, $b = 2$
- 1), 2)에서 $a > 0$ 일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$
 $a < 0$ 일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$
즉 $a + b = 1$

5. 공집합이 아닌 집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$$

$$x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

X 는 집합 $\{-2, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

6. 실수 전체의 집합에서 $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ 로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = 2$ 가 되는 x 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) + 1$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \right) + 1$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{7}{4} = 2$$

$$\therefore x = 2$$

7. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
 $(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x$, $a(2x - 1) + b = x$
 $x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
 $x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
 $\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

8. $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$a+b=1, 2a+b=3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

9. 어떤 시험에서 수험생의 남녀 비율은 6 : 5, 합격생의 남녀 비율은 7 : 6, 불합격생의 남녀 비율은 3 : 2이다. 남자의 합격률을 p , 여자의 합격률을 q 라고 할 때, pq 의 값은?

- ① $\frac{39}{80}$
- ② $\frac{42}{80}$
- ③ $\frac{45}{80}$
- ④ $\frac{53}{80}$
- ⑤ $\frac{63}{80}$

해설

수험생의 남녀의 수를 $6a, 5a$, 합격생의 남녀의 수를 $7b, 6b$
불합격생의 남녀의 수를 $3c, 2c$ 로 놓으면

$$6a = 7b + 3c \cdots ①$$

$$5a = 6b + 2c \cdots ②$$

① $\times 2 -$ ② $\times 3$ 을 정리하면

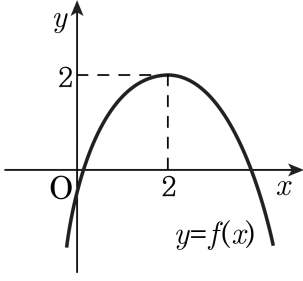
$$-3a = -4b$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore p = \frac{7b}{6a} = \frac{7}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8}, q = \frac{6b}{5a} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{10}$$

$$\therefore pq = \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} = \frac{63}{80}$$

10. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

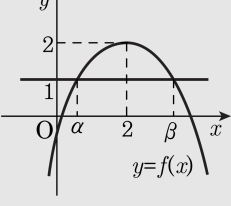


- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
 $f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만
 $f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

11. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 4x + 1$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(x) \text{ 이므로} \\ (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(9) \\ &= (I \circ I)(9) \\ &= 9\end{aligned}$$

12. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2009|$ 은 $x=a$ 에서 최솟값을 가진다. 이때, a 의 값은?

① 1001 ② 1002 ③ 1003 ④ 1004 ⑤ 1005

해설

$f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2009|$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 갖는 경우는

$$x = \frac{1+2009}{2} = 1005 \text{ 일 때이다.}$$

$$\therefore a = 1005$$

13. $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

- ① 0 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ -1

해설

(분모의 합)

$$= (b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c) = a+b+c$$

i) $a+b+c \neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c-a} &= \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c} \\ &= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1\end{aligned}$$

ii) $a+b+c = 0$ 일 때,

$$b+c = -a, \quad c+a = -b, \quad a+b = -c \text{ 이므로}$$

$$\frac{a}{-a-a} = \frac{b}{-b-b} = \frac{c}{-c-c} = -\frac{1}{2}$$

i), ii) 에서 구하는 값은 1 또는 $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 분수식의 값들의 합은 $\frac{1}{2}$

14. 두 실수 x, y 가 $x + y = -1$, $xy = 2$ 을 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ② $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{2}i$ ④ $-\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

해설

$$x + y = -1, \quad xy = 2 \Rightarrow x < 0, \quad y < 0$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (\because x < 0, \quad y < 0)$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2}{\sqrt{y}\sqrt{x}} = \frac{x + y}{-\sqrt{xy}} = \frac{-1}{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

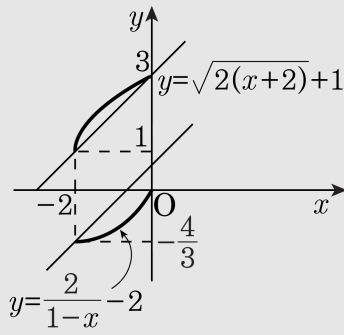
15. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$, $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 에 대하여 $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 과 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다

아래에 있으므로 $r < 3$

또한, $y = x + r$ 의 그래프가

$y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프보다

위에 있으므로 $r > \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -1$

16. 정의역과 공역이 모두 자연수의 집합인 함수 $f(n)$ 이 있다. $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 이고, $f(7) = 21$ 일 때, $f(9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 55

해설

$$f(1) = a, f(2) = b \text{ 라고 하면 } f(3) = a + b$$

$$f(4) = a + 2b$$

$$f(5) = 2a + 3b$$

$$f(6) = 3a + 5b$$

$$f(7) = 5a + 8b = 21 \text{ 을 만족하는 자연수는}$$

$$\therefore a = 1, b = 2$$

$$f(8) = 8a + 13b$$

$$f(9) = 13a + 21b = 13 + 42 = 55$$

17. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} = S$ 라고 할 때, $\frac{1}{1 \times 2007} + \frac{1}{2 \times 2006} + \frac{1}{3 \times 2005} + \cdots + \frac{1}{2006 \times 2} + \frac{1}{2007 \times 1}$ 의 값을 S 로 나타내면?
- ① $\frac{S}{1003}$ ② $\frac{S}{\frac{1004}{2006}}$ ③ $\frac{S}{2006}$
 ④ $\frac{S}{2007}$ ⑤ $\frac{2006}{2007}S$

해설

주어진 식의 각 항의 분모가 $A \times B$ 의 꼴이고
 $A + B = 2008$ 로 일정하므로
 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{A+B} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용한다.

∴(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2007} \right) + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2006} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2005} \right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2006} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2007} + \frac{1}{1} \right) \\
 &= \frac{1}{2008} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{2007} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \right\} \\
 &= \frac{2}{2008} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} \right) \\
 &= \frac{S}{1004}
 \end{aligned}$$

18. 비례식 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} (\neq 1)$ 가 성립할 때, 다음 등식 중 성립하는 것의 개수를 구하면? (단, $mb + nd \neq 0, b + d + f \neq 0$)

ⓐ $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

ⓑ $\frac{2a+3b}{a-b} = \frac{2c+3d}{c-d}$

ⓒ $\frac{a}{b} = \frac{ma+nc}{mb+nd}$

ⓓ $\frac{ab+cd}{a^2+c^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}$

ⓔ $\frac{ab-cd}{a^3-c^3} = \frac{a^2-c^2}{e^3} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}$

- ⓐ 1
- ⓑ 2
- ⓒ 3
- ⓓ 4
- ⓔ 5

해설

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ 로 놓으면
 $a = bk, c = dk, e = fk$
ⓐ (좌변) $= \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{k+1}{k-1}$
(우변) $= \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{k+1}{k-1}$
∴ (좌변) = (우변)
ⓑ (좌변) $= \frac{2bk+3b}{bk-b} = \frac{2k+3}{k-1}$
(우변) $= \frac{2dk+3d}{dk-d} = \frac{2k+3}{k-1}$
∴ (좌변) = (우변)
ⓒ (좌변) $= \frac{bk}{b} = k$
(우변) $= \frac{mbk+ndk}{mb+nd} = k$
∴ (좌변) = (우변)
ⓓ (좌변) $= \frac{bk \cdot b + dk \cdot d}{bk \cdot b - dk \cdot d} = \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$
(우변) $= \frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2} = \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$
∴ (좌변) = (우변)
ⓔ (좌변) $= \frac{b^3k^3}{b^2} + \frac{d^3k^3}{d^2} + \frac{f^3k^3}{f^2} = (b+d+f)k^3$
(우변) $= \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2} = (b+d+f)k^3$
∴ (좌변) = (우변)
따라서, ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ 모두 성립한다.