1. $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x = a,\ y = b$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 2$

해설

$$y = \frac{3x+1}{2x-1}$$

$$= \frac{3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$

$\therefore\ a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}\quad a + b = 2$

2. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 의

역함수를 구하면

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{ax+b}{x+c}$$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ 2+3+4=9$

3. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

4. 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 3\}$에 대하여 X에서 X로의 일차함수 $f(x) = ax + b$의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a와 b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$일 때 $f(-1) = -1,\ f(3) = 3$을 만족

$-a + b = -1,\ 3a + b = 3$

따라서 $a = 1,\ b = 0$

2) $a < 0$일 때 $f(-1) = 3,\ f(3) = -1$

$-a + b = 3,\ 3a + b = -1$

따라서 $a = -1,\ b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$a < 0$일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$

즉 $a + b = 1$

5. 공집합이 아닌 집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$f(x) = g(x)$
즉 $x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$
$x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
X는 집합 $\{-2,\ 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.
따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

6. 실수 전체의 집합에서 $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$로 정의된 함수 f에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = 2$가 되는 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$
$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) + 1$$
$$= \frac{1}{8}x + \frac{7}{4} = 2$$

$\therefore\ x = 2$

7. 함수 $f(x) = -x,\ g(x) = 2x-1$ 일 때, $(h\circ g\circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,

$(h\circ g\circ f)x = (h\circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h\circ g = I$

즉 $(h\circ g)(x) = x,\ \ a(2x-1) + b = x$

$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$

$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$

$\therefore\ \ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$

따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

8. $\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$
$$= \frac{(a+b)\,x + 2a + b}{(x+1)\,(x+2)}$$

$a + b = 1, 2a + b = 3$

$\therefore\ a = 2,\ b = -1$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$

9. 어떤 시험에서 수험생의 남녀 비율은 $6 : 5$, 합격생의 남녀 비율은 $7 : 6$, 불합격생의 남녀 비율은 $3 : 2$이다. 남자의 합격률을 p, 여자의 합격률을 q라고 할 때, pq의 값은?

① $\frac{39}{80}$ ② $\frac{42}{80}$ ③ $\frac{45}{80}$ ④ $\frac{53}{80}$ ⑤ $\frac{63}{80}$

해설

수험생의 남녀의 수를 $6a$, $5a$, 합격생의 남녀의 수를 $7b$, $6b$ 불합격생의 남녀의 수를 $3c$, $2c$로 놓으면

$6a = 7b + 3c \cdots$ ①

$5a = 6b + 2c \cdots$ ②

① $\times 2 -$ ② $\times 3$을 정리하면

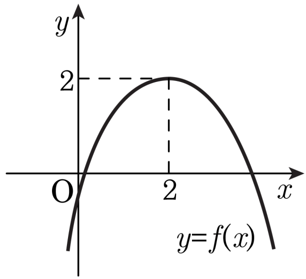
$-3a = -4b$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$

$\therefore p = \frac{7b}{6a} = \frac{7}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$, $q = \frac{6b}{5a} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{10}$

$\therefore pq = \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} = \frac{63}{80}$

10. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

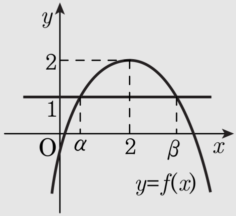
$(f \circ f)(x) = 1$을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$

$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$을 만족하는 t의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.

이 때, $f(x) = \alpha$를 만족하는 x의 값은 2개이지만

$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$을 만족하는 x의 값은 2개이다.

11. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=4x+1$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(9)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$(g\cdot f)^{-1}(x)=(f^{-1}\cdot g^{-1})(x)$ 이므로

$$
\begin{aligned}
(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(9) &= (f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(9)\\
&= (\mathrm{I}\circ\mathrm{I})(9)\\
&= 9
\end{aligned}
$$

12. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2009|$ 은 $x = a$ 에서 최솟값을 가진다. 이때, a 의 값은?

① 1001 ② 1002 ③ 1003 ④ 1004 ⑤ 1005

해설

$f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2009|$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 갖는 경우는

$x = \dfrac{1+2009}{2} = 1005$ 일 때이다.

$\therefore\ a = 1005$

13. $\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{c+a-b}=\dfrac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

① 0　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ -1

해설

(분모의 합)

$=(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c$

ⅰ) $a+b+c\neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

ⅱ) $a+b+c=0$ 일 때,

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$ 이므로

$$\frac{a}{-a-a}=\frac{b}{-b-b}=\frac{c}{-c-c}=-\frac{1}{2}$$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 값은 1 또는 $-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 분수식의 값들의 합은 $\dfrac{1}{2}$

14. 두 실수 x, y 가 $x+y=-1$, $xy=2$을 만족할 때, $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ ② $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\dfrac{1}{2}i$ ④ $-\dfrac{1}{2}i$ ⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

해설

$x+y=-1,\ xy=2 \Rightarrow x<0,\ y<0$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (\because\ x<0,\ y<0)$$

$$=\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{y}\sqrt{x}}=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

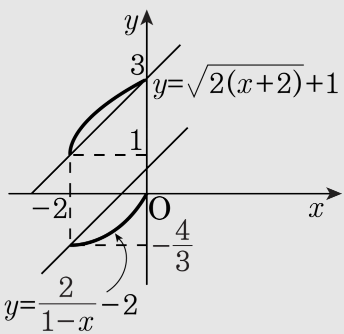
15. 정의역이 $\{x|-2 \le x \le 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \le x \le 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

16. 정의역과 공역이 모두 자연수의 집합인 함수 $f(n)$ 이 있다. $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 이고, $f(7) = 21$ 일 때, $f(9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 55

해설

$f(1) = a,\ f(2) = b$ 라고하면 $f(3) = a + b$

$f(4) = a + 2b$

$f(5) = 2a + 3b$

$f(6) = 3a + 5b$

$f(7) = 5a + 8b = 21$ 을 만족하는 자연수는

$\therefore\ a = 1,\ b = 2$

$f(8) = 8a + 13b$

$f(9) = 13a + 21b = 13 + 42 = 55$

17. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}=S$ 라고 할 때, $\frac{1}{1\times 2007}+\frac{1}{2\times 2006}+\frac{1}{3\times 2005}+\cdots+\frac{1}{2006\times 2}+\frac{1}{2007\times 1}$ 의 값을 S 로 나타내면?

① $\frac{S}{1003}$ ② $\frac{S}{1004}$ ③ $\frac{S}{2006}$

④ $\frac{S}{2007}$ ⑤ $\frac{2006}{2007}S$

해설

주어진 식의 각 항의 분모가 $A\times B$ 의 꼴이고

$A+B=2008$ 로 일정하므로

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{A+B}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용한다.

$\therefore$(주어진 식)

$$=\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2007}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2006}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2005}\right)+\cdots+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2006}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{1}\right)$$

$$=\frac{1}{2008}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)+\left(\frac{1}{2007}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{2008}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)$$

$$=\frac{S}{1004}$$

18. 비례식 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}(\neq 1)$가 성립할 때, 다음 등식 중 성립하는 것의 개수를 구하면? (단, $mb+nd\neq 0, b+d+f\neq 0$)

㉠ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ㉡ $\frac{2a+3b}{a-b}=\frac{2c+3d}{c-d}$ ㉢ $\frac{a}{b}=\frac{ma+nc}{mb+nd}$ ㉣ $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ ㉤ $\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}=\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$로 놓으면

$a=bk,\ c=dk,\ e=fk$

㉠ (좌변)$=\frac{bk+b}{bk-b}=\frac{k+1}{k-1}$

(우변)$=\frac{dk+d}{dk-d}=\frac{k+1}{k-1}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉡ (좌변)$=\frac{2bk+3b}{bk-b}=\frac{2k+3}{k-1}$

(우변)$=\frac{2dk+3d}{dk-d}=\frac{2k+3}{k-1}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉢ (좌변)$=\frac{bk}{b}=k$

(우변)$=\frac{mbk+ndk}{mb+nd}=k$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉣ (좌변)$=\frac{bk\cdot b+dk\cdot d}{bk\cdot b-dk\cdot d}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

(우변)$=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

㉤ (좌변)$=\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{d^3k^3}{d^2}+\frac{f^3k^3}{f^2}=(b+d+f)k^3$

(우변)$=\frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^2}=(b+d+f)k^3$

$\therefore$ (좌변)$=$ (우변)

따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 모두 성립한다.