

1. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

2. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1$, $f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 로 놓으면,

$f(1) = -1$, $f(2) = 3$ 이므로

$$f(1) = a + b = -1, f(2) = 2a + b = 3$$

즉, $a = 4$, $b = -5$

$$\therefore f(x) = 4x - 5$$

$f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$

$$4a - 5 = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(1) = \frac{3}{2}, 2f^{-1}(1) = 3$$

3. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 7$

▷ 정답 : $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{ 이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

4. 함수 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3$, $n = 1$

$$m + n = 4$$

5. 다음 보기 중에서 집합인 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 큰 컴퓨터들의 모임
- ㉡ 10보다 큰 자연수들의 모임
- ㉢ MP3를 많이 가진 학생들의 모임
- ㉣ 게임을 잘하는 학생들의 모임
- ㉤ 0과 1 사이에 있는 자연수의 모임
- ㉥ 우리 반에서 PMP를 가진 학생들의 모임

① ㉡, ㉣

② ㉤, ㉥

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉣, ㉤

⑤ ㉡, ㉤, ㉥

해설

- ㉠ ‘큰’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉢ ‘많이’라는 단어는 명확한 기준이 없으므로 집합이 될 수 없다.
- ㉣ ‘잘하는’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉤ 0과 1 사이에는 자연수가 존재하지 않는다.
즉, 원소가 하나도 없는 집합을 의미한다. 그러므로 집합이다.

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 원소의 개수가 2 개인 부분집합 중 원소의 합이 5 인 집합은 몇 개인가?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

원소의 개수가 2 개인 A 의 부분집합 : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$

이 중 원소의 합이 5 인 집합은 $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ 이다.

7. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 에 대하여, $A - B^c$ 을 원소나열 방법으로 옳게 나타낸 것은?

① $\{1, 2\}$

② $\{1, 2, 3\}$

③ $\{1, 2, 4\}$

④ $\{1, 2, 3, 6\}$

⑤ $\{1, 2, 4, 8\}$

해설

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$A - B^c = A \cap B = \{1, 2\}$$

8. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
' $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

대우 : $x = 0, y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

9. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

① $p : ac = bc, q : a = b$

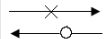
② $p : A \subset B, q : A - B = \emptyset$

③ $p : a > 0$ 이고 $b < 0, q : ab < 0$

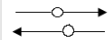
④ $p : a + b$ 가 정수, $q : a, b$ 가 정수

⑤ $p : \triangle ABC$ 는 정삼각형이다. $q : \triangle ABC$ 의 세 내각의 크기가 같다.

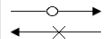
해설

① $ac = bc$  $a = b$ (반례 : $a = 1, b = 2, c = 0$)

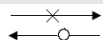
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

② $A \subset B$  $A - B = \emptyset$

따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

③ $a > 0$ 이고 $b < 0$  $ab < 0$ (반례 : $a = -2, b = 2$)

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건

④ $a + b$ 가 정수  a, b 가 정수 (반례 : $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$)
)

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.

따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

10. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 가 다음과 같을 때, 항등함수가 아닌 것은?

① $f : x \rightarrow 2|x|$

② $f : x \rightarrow x^3$

③ $f : x \rightarrow x^5$

④ $f : x \rightarrow x$

⑤ $f : x \rightarrow x|x|$

해설

① $f(-1) = 2, f(0) = 0, f(1) = 2$ 이므로 항등함수가 아니다.

①, ②, ③, ④ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로 모두 항등함수이다.

11. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = 2|x - 1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M, m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 5

해설

$y = 2|x - 1| + x$ 에서

(i) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) + x = -x + 2$ 이므로

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = 2|x - 1| + x$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7, $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$$M + m = 7 + 1 = 8$$

12. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 않은 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다.
원소는 10 미만의 자연수이다.

- ① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\}$ ② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\}$ ④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.

원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.

원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2, 3, 5, 7\}$ 임을 알 수 있다.

- ① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5\}$
② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

13. 세 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$, $C = \{x \mid x = 2 \times n + 1, n = 0, 1\}$ 에 대하여 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C \subset A \subset B$

② $A \subset B \subset C$

③ $B \subset A \subset C$

④ $C \subset B \subset A$

⑤ $A \subset C \subset B$

해설

$$B = \{1, 3, 5, 7\}, C = \{1, 3\}$$

따라서 $C \subset B \subset A$ 의 포함 관계가 성립한다.

14. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

① $A = B$ 이면 $A \subset B$, $B \subset A$

② $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$

③ $A \subset B$ 이면 $n(A) < n(B)$

④ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$

⑤ $n(\{1, 2, 3, 4\}) - n(\{1, 2, 3\}) = 4$

해설

② $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ 이면

$n(A) = n(B)$ 이지만 $A \neq B$

③ $A = B$ 이면 $A \subset B$ 이지만

$n(A) < n(B)$ 가 아닌 $n(A) = n(B)$

⑤ $n(\{1, 2, 3, 4\}) = 4$

$n(\{1, 2, 3\}) = 3$

$4 - 3 = 1$

15. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

① $A \cap B = A$ 이면 $n(A) < n(B)$

② $A \cap B = \emptyset$ 이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

③ $A - B = \emptyset$ 이면 $A = B$

④ $A \cup B = B$ 이면 $B - A = \emptyset$

⑤ $A \cap B^c = A$ 이면 $n(A \cap B) = 0$

해설

① $A \cap B = A$ 이면 $n(A) \leq n(B)$

③ $A - B = \emptyset$ 이면 $A \subset B$

④ $A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$ 이므로 $A - B = \emptyset$

16. 양수 a, b 가 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ 을 만족할 때, $\frac{a^4 + b^4}{a^2b^2} + 5$ 의 값을 구하면?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}, \quad \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a+b}$$

$$(b-a)(b+a) = ab$$

$$\therefore b^2 - a^2 = ab$$

$b^2 - a^2 = ab$ 의 양변을 제곱하면

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^2b^2$$

$$\therefore a^4 + b^4 = 3a^2b^2$$

$$\therefore \frac{a^4 + b^4}{a^2b^2} + 5 = 3 + 5 = 8$$

17. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 x , 무색생물의 수가 y 일 때, $\frac{y}{x+y} \times 100(\%)$ 로 정의된다. 지난 달 수질 검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 20%이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과 지난달에 비해 유색 생물의 수는 2배, 무색생물의 3배가되었다. 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 %인가?

① 약 14.3%

② 약 15.2%

③ 약 17.1%

④ 약 21.3%

⑤ 약 27.3%

해설

$$\text{지난달 검사 : } \frac{y}{x+y} \times 100 = 20 \Rightarrow x = 4y$$

$$\text{이번달 검사 : } \frac{3y}{2x+3y} \times 100 = \frac{3y}{11y} \times 100 \approx 27.3(\%)$$

18. 함수 $y = \frac{1}{x+2} + 2$ 의 그래프가 $y = ax + b$, $y = cx + d$ 에 대하여 대칭이 될 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점근선의 교점이 $(-2, 2)$ 이므로

두 직선 $y = ax + b$ 와 $y = cx + d$ 에 대하여

대칭이 되려면 $a = 1$, $c = -1$

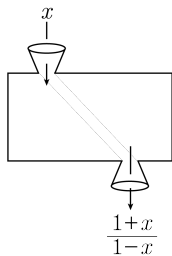
따라서 $y - 2 = x + 2$ 또는 $y - 2 = -(x + 2)$

$\therefore y = x + 4$ 또는 $y = -x$

$\therefore b = 4$, $d = 0$

$\therefore a + b + c + d = 4$

19. 다음 그림과 같이 x 를 넣으면 $\frac{1+x}{1-x}$ 가 나오는 상자가 있다. 이 상자에 x_1 을 넣었을 때, 나오는 것을 x_2 , x_2 를 다시 넣었을 때 나오는 것을 x_3 라 한다. 이와 같이 계속하여 x_n 을 넣었을 때 나오는 것을 x_{n+1} 이라 한다. $x_1 = -\frac{1}{2}$ 일 때, x_{2000} 을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{이면}$$

$$x_2 = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2,$$

$$x_4 = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3,$$

$$x_5 = \frac{1 + (-3)}{1 - (-3)} = -\frac{1}{2}, x_6 = \frac{1}{3}, \dots$$

그러므로 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ 일 때

$$x_{4k+1} = -\frac{1}{2}, x_{4k+2} = \frac{1}{3}, x_{4k+3} = 2, x_{4k+4} = -3$$

따라서, $2000 = 4 \times 499 + 4$ 이므로

$$x_{2000} = x_4 = -3$$

20. $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 이다. $n(A \cap B \cap X) = 1$, $B \cup X = B$ 인 집합 X 는 모두 몇 개인가?

① 21 개

② 22 개

③ 23 개

④ 24 개

⑤ 25 개

해설

$A \cap B = \{2, 4, 6\}$, $B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$,

즉 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 2, 4, 6 중 어느 하나만 원소로 갖는 집합이므로

2, 4, 6 중 2 만을 원소로 가질 때 $2^3 = 8$

4, 6 만을 원소로 가질 때에도 마찬가지로

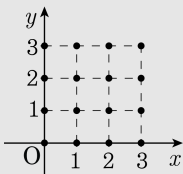
집합 X 의 개수는 $8 \times 3 = 24$ (개)

21. x, y 가 0부터 3까지의 정수일 때, 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 의 집합을 A 라 하자. 만일 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4 에 대하여 $\square P_1P_2P_3P_4$ 정사각형일 때, 집합 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 를 정사각집합이라 하면, A 의 부분집합 중 정사각집합의 개수는?

- ① 20 개 ② 22 개 ③ 24 개 ④ 26 개 ⑤ 28 개

해설

그림의 16개의 점 중에서 4개를 선택하여 만들 수 있는 정사각형의 개수를 구하면 된다.
 한 변의 길이가 1인 정사각형은 9 개, 한 변의 길이가 2인 정사각형은 4개, 한 변의 길이가 3인 정사각형은 1 개, 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형은 4개, 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 정사각형은 2 개
 따라서 구하는 정사각집합의 개수는
 $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ (개)



22. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq n(a^4 + b^4 + c^4)$ 을 만족하는 최소의 양의 정수 n 을 구하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$x = a^2, y = b^2, z = c^2$ 이라 하면

$(x - y)^2 \geq 0, (y - z)^2 \geq 0, (x - z)^2 \geq 0$ 이므로

$x^2 + y^2 \geq 2xy, y^2 + z^2 \geq 2yz, z^2 + x^2 \geq 2zx$

$\therefore (x + y + z)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$= x^2 + y^2 + z^2 + (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2)$

$= 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\therefore (a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq 3(a^4 + b^4 + c^4)$ (단, 등호는 $a = \pm b = \pm c$ 일 때 성립한다.)

23. 집합 $X = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 에서 실수 전체의 집합 R 로의 함수 f 는 $f(x) = \frac{x^2 + 5}{6}$ 이다. f 의 정의역과 치역이 일치할 때, $a + b$ 의 값은?
(단, $0 < a < b$)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$f(a) = \frac{a^2 + 5}{6}, f(b) = \frac{b^2 + 5}{6} \text{ 이고}$$

$$0 < a < b \text{ 이므로 } f(a) < f(b)$$

따라서, 함수 f 의 치역은

$$f(X) = \{y \mid f(a) \leq y \leq f(b)\}$$

그런데 정의역과 치역이 일치하므로

$$\text{즉 } f(X) = X \text{ 이므로 } f(a) = a, f(b) = b$$

$$f(a) = a \text{ 에서 } \frac{a^2 + 5}{6} = a,$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0, (a - 1)(a - 5) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 5$$

$$f(b) = b \text{ 에서 } \frac{b^2 + 5}{6} = b,$$

$$b^2 - 6b + 5 = 0, (b - 1)(b - 5) = 0$$

$$\therefore b = 1 \text{ 또는 } b = 5$$

$$\text{그런데 } a < b \text{ 이므로 } a = 1, b = 5$$

$$\therefore a + b = 6$$

24. $x = 2\sqrt{a-1}$ ($a > 1$) 일 때,

$$P = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \text{로 놓는다.}$$

$$P = x - \frac{1}{x} \text{ 일 때, } x \text{의 값은?}$$

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

⑤ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

해설

$$x = 2\sqrt{a-1} \text{에서 } \sqrt{a-1} = \frac{x}{2}, a-1 = \frac{x^2}{4}$$

$$\therefore a = \frac{x^2}{4} + 1$$

$$x > 0 \text{이므로 } \sqrt{a+x} = \sqrt{\frac{(x+2)^2}{4}} = \frac{x+2}{2}$$

$$\sqrt{a-x} = \sqrt{\frac{(x-2)^2}{4}} = \frac{|x-2|}{2}$$

$$\therefore P = \frac{x+2+|x-2|}{x+2-|x-2|} = \begin{cases} \frac{2}{x} & (0 < x < 2) \\ \frac{x}{2} & (x \geq 2) \end{cases}$$

i) $0 < x < 2$ 일 때 $\frac{2}{x} = x - \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{3}{x} = x$$

$$\therefore x = \sqrt{3} \text{(적합)}$$

ii) $x \geq 2$ 일 때 $\frac{x}{2} = x - \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \sqrt{2} \text{(부적합)}$$

i), ii)에서 $x = \sqrt{3}$