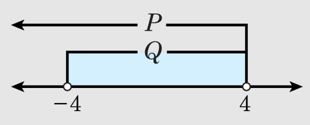
1. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q\ :\ -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 24 개

해설

a에 대응하는 수가 b에 대응해서는 안 되고
a, b에 대응하는 수가 c에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

3. 다음 식을 간단히 하면 $\dfrac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+6}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+8}\right)$

$+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+8}-\dfrac{1}{x+10}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+10}\right)$

$=\dfrac{5}{x(x+10)}$

$a=5$, $b=10$ 이므로 $a+b=15$

4. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$을 간단히 하여라.

① $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

해설

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1+2+2\sqrt{2})-3}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

5. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 100 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A = \{x \mid x$는 6의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 8의 배수$\}$라 할 때, 집합 $A - B^c$의 원소의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$n(A) = n(A_6) = 16$

$n(B) = n(A_8) = 12$

$$\begin{aligned} n(A - B^c) &= n(A \cap B) \\ &= n(A_6 \cap A_8) \\ &= n(A_{24}) = 4 \end{aligned}$$

6. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 보기 중 함수 $f : X \to X$로 가능한 것의 개수는 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x$ ㉡ $f(x) = x^2$ ㉢ $f(x) = |x|$

㉣ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ㉤ $f(x) = \sqrt{x}$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ $f(x) = -x$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = -1 \in X$
따라서 함수이다.
㉡ $f(x) = x^2$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = 1 \in X$
따라서 함수이다.
㉢ $f(x) = |x|$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = 1 \in X$
따라서 함수이다.
㉣ $f(x) = \dfrac{1}{x}$에서 $f(0)$이 정의되지 않으므로 함수가 아니다.
㉤ $f(x) = \sqrt{x}$에서 $f(-1) = i \notin X$이므로 함수가 아니다.
따라서 함수로 가능한 것은 ㉠, ㉡, ㉢의 3개다.

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 $f(x)$는 항등함수이고, $g(x) = -2$일 때, $f(4) + g(-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$는 항등함수이므로
$f(x) = x$에서 $f(4) = 4$,
$g(x) = -2$에서 $g(-1) = -2$
$\therefore\ f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

8. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$　　② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$　　④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때,
$(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로
$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$
$3h(x) - 2 = x + 1$, $3h(x) = x + 3$
$\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

9. 집합 $A = \{x \mid x > 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f \circ g$ 가 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x-1}$ 일 때, $(f \circ (g \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

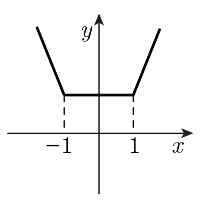
$(f \circ (g \circ f)^{-1}) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1}) = g^{-1}$

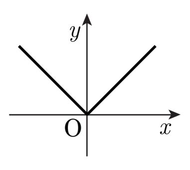
$\therefore g^{-1}(3) = k$ 라 하면

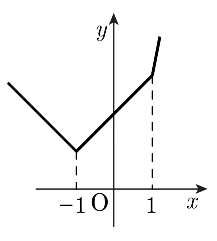
$g(k) = 3$

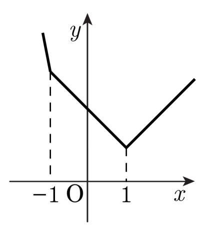
$\Rightarrow \sqrt{2}k - 1 = 3 \Rightarrow k = 5$

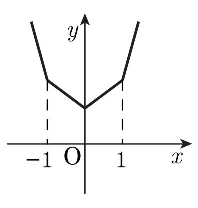
10. 다음 중 함수 $y=|x-1|+x+|x+1|$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


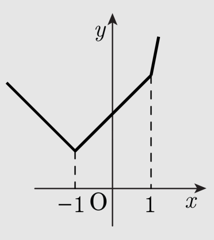
해설

i) $x \le -1$ 일 때, $y=|x-1|+x+|x+1|$
$= -(x-1)+x-(x+1)$
$= -x$

ii) $-1 < x \le 1$ 일 때 $y=|x-1|+x+|x+1|$
$= -(x-1)+x+(x+1)$
$= x+2$

iii) $1 < x$ 일 때 $y=|x-1|+x+|x+1|$
$= (x-1)+x+(x+1)$
$= 3x$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



11. 두 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+1,\ y=m(x-1)+1$ 의 그래프가 만날 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 고르면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

분수함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+1$ 의 그래프는

점근선이 $x=1,\ y=1$ 이고,

점 $(0,\ 0)$ 을 지난다.

$y=m(x-1)+1$ 의 그래프는 점 $(1,\ 1)$ 을

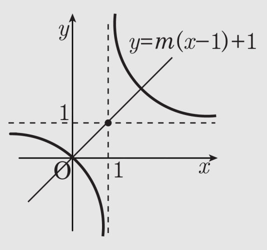
지나는 직선이므로 두 함수가 만나기 위한

실수 m 의 값의 범위는

다음 그림에서 $m>0$ 이다.

따라서, 보기 중 m 의 값이 될 수 있는 것은

⑤이다.



12. 실수 전체의 집합 R 의 부분집합 S 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 옳지 않은 것을 고르면? (단, n 은 자연수)

Ⅰ. $5 \in S,\ 7 \in S$
Ⅱ. $p \in S,\ q \in S$ 이면 $p + q \in S$

① $5n \in S$　② $7n \in S$　③ $12n + 1 \in S$

④ $12n + 2 \in S$　⑤ $17n + 3 \in S$

해설

① $p = q = 5$ 이면 $p + q = 5 \times 2 \in S$
$p = 5 \times 2,\ q = 5$ 이면 $p + q = 5 \times 3 \in S$
이와 같이 계속하면 $5n \in S$
② ①과 같은 방법으로 $7n \in S$
③ S 를 작은 수부터 차례로 써 보면
$S = \{5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 14, \ldots\}$ 이므로
$13 \notin S \ \leftarrow\ 13 = 12 \times 1 + 1$
④ $12n + 2 = 5n + 7n + 7 - 5 = 5(n-1) + 7(n+1)$ 이므로
①, ②에 의해서 $12n + 2 \in S$
⑤ $17n + 3 = 10n + 7n + 10 - 7$
$= 5(2n + 2) + 7(n - 1) \in S$

13. 두 집합 $A = \{x|1 \le x \le 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X를 $X = \{x|p \le x \le q\}$라 할 때, q의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

① 1, 3　② 1, 5　③ 1, 7　④ 3, 5　⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \le x \le 3\} \subset X \subset \{x|1 \le x \le 5\}$

$X = \{x|p \le x \le q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \le q \le 5$

14. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } n\text{보다 작은 자연수}\}$ 이고 집합 B 는 A 의 모든 부분집합을 원소로 하는 집합이다. 집합 B 의 부분집합의 개수가 16 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2^k = 16 = 2^4 \quad \therefore k = 4$

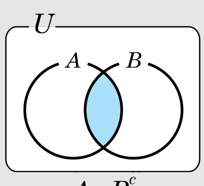
B 의 원소의 개수가 4 개 이므로, 집합 A 의 부분집합의 수는 4 개이다.

$2^{(n\text{보다 작은 자연수 개수})} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$

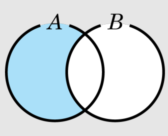
15. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A - B^c = A \cap B$
② $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$
③ $A^c \cap (A \cup B) = A - B$
④ $(A^c \cap B) - A = B \cap A^c$
⑤ $(A - B)^c = A^c \cup B$

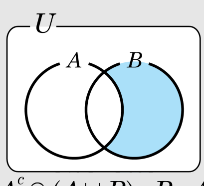
해설

①


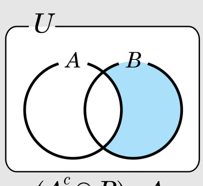
$A - B^c$

②


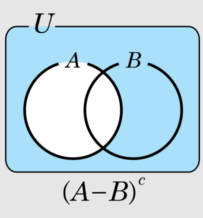
$A \cup (A \cap B)$

③


$A^c \cap (A \cup B) = B - A$

④


$(A^c \cap B) - A$

⑤


$(A - B)^c$

16. 두 집합 $A = \{x|x$는 7미만의 자연수$\}$, $B = \{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$에 대하여 $(B - A) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 64 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B = \{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$
$(B - A) \cup X = X$이므로 $(B - A) \subset X$,
$(A \cup B) \cap X = X$이므로 $X \subset (A \cup B)$,
$\{7,\ 8\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$,
따라서, 집합 X는 $A \cup B$의 부분집합 중 원소 7, 8을 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{8-2} = 2^6 = 64$(개)이다.

17. (가) 고등학교 1 학년 630 명을 대상으로 경주와 제주도를 관광한 적이 있는지를 조사하였더니 경주를 관광한 학생은 400 명, 제주도를 관광한 학생은 330 명이였다. 이 때, 경주와 제주도를 모두 관광한 학생은 최소 m 명이고 최대 M 명이다. $m+M$ 의 값은?

① 200 명　② 330 명　③ 430 명
④ 500 명　⑤ 530 명

해설

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=730-n(A\cup B)\cdots\cdots$ ㉠

ⅰ) $n(A\cap B)$ 가 최대일 경우 $\rightarrow$ 제주도를 관광한 학생이 모두 경주를 관광할 때 최대이다.

$\therefore n(A\cap B)=330\cdots\cdots(M)$

ⅱ) $n(A\cap B)$ 가 최소인 경우 $\rightarrow$
㉠에서 $n(A\cup B)$ 가 최대일 때이다.

$\therefore n(A\cup B)=n(U)=630$

$\Rightarrow n(A\cap B)=100\cdots\cdots(m)$

$M+m=330+100=430$

18. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $r \rightarrow p$　　② $\sim p \rightarrow \sim q$　　③ $\sim p \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$　　⑤ $\sim q \rightarrow \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \rightarrow p$, $r \rightarrow q$ 가 참
$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \rightarrow p$ 가 참
$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \rightarrow p$, $r \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim p \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

19. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때
$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로

$\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{b}>0,\ \frac{a}{c}>0$

$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\times\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$

$1+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}},\ \ 1+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$

$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$

$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}}=8$

$\therefore\ \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq 8$

따라서 최솟값은 8

20. 네명의 피의자가 검사에게 다음과 같이 진술하였을때 한 사람의 진술만이 참일 경우의 범인과 한 사람의 진술만이 거짓일 경우의 범인을 차례대로 구하면 ?

A : ‘나는 범인이 아니다.’
B : ‘D가 범인이다.’
C : ‘D는 거짓말을 했다.’
D : ‘C가 범인이다.’

① A와 B　② A와 D　③ B와 A
④ D와 A　⑤ C와 D

해설

1) 한 사람의 진술만 참일 경우
C 가 참 : A가 범인이 된다.
D 가 참 : C, A 가 범인이 되어 모순
A 가 참 : D의 진술의 참 , 거짓이 모순
B 가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순
∴ A 가 범인이다.
2) 한 사람의 진술만 거짓인 경우
A 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
B 가 거짓 : D의 진술의 참 거짓이 모순
C 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
D가 거짓 : D가 범인
따라서 D가 범인이다.

21. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $g(0)=5$ 가 된다. $f(2x+1)=h(x)$ 로 하고, $h(x)$ 의 역함수를 $e(x)$ 로 할 때 $e(0)$ 의 값은 ?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로
$g(x)=f^{-1}(x),\ g(0)=f^{-1}(0)=5$
$\therefore\ f(5)=0$ 문제의 조건에서
$f(5)=f(2\times 2+1)=h(2)=0$
또 $e(x)=h^{-1}(x)$ 이므로 $e(0)=h^{-1}(0)$
$\therefore\ h(2)=0$ 이므로 $h^{-1}(0)=e(0)=2$

22. A, B, C세 사람은 각각 책 읽는 속도가 다르다. A가 어떤 책을 읽기 시작하고 나서 3시간 지났을 때, B가 같은 책을 읽기 시작하였다. 그로부터 5시간 후에는 A, B가 모두 총 쪽수의 $\frac{1}{3}$을 읽었다. C는 이 때부터 같은 책을 읽기 시작하여 B와 동시에 책을 다 읽었다. A가 다른 책을 6시간 걸려서 다 읽는다면 C가 그 책을 모두 읽는 데 걸리는 시간은?

① 1시간 50분　② 2시간 10분　③ 2시간 30분
④ 2시간 50분　⑤ 3시간 10분

해설

B는 책의 $\frac{1}{3}$을 5시간 걸려서 읽었으므로
책을 다 읽는 데는 15시간이 걸린다.
A는 책의 $\frac{1}{3}$을 읽는 데 B보다 3시간이 더 걸리므로
책을 다 읽는 데는 $(5+3)\times 3 = 24$(시간)이 걸린다.
또, B가 전체의 $\frac{2}{3}$를 읽는 데 걸린 시간과 C가 책 전체를 읽는 데 걸린 시간이 같으므로
C는 책을 다 읽는 데 $15 \times \frac{2}{3} = 10$(시간)이 걸린다.
따라서 같은 책을 읽을 때, A와 C의 책 읽는 데 걸리는 시간의 비가 $24 : 10$이므로
C가 A가 읽은 다른 책을 읽는 데 걸리는 시간을 x라 하면
$24 : 10 = 6 : x$
$\therefore x = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$(시간)
따라서 2시간 30분이 걸린다.

23. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 8$일 때, $x^2 + \sqrt{6}x$의 값은? (단, $0 < x < 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 8$의 양변에 x^2을 곱하고 정리하면

$(x^2)^2 - 8x^2 + 1 = 0$

근의 공식으로 풀면

$x^2 = 4 - \sqrt{15}$ ($\because$ $0 < x < 1$) $\cdots$ ①

$x = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ ($\because$ $0 < x$)

$= \sqrt{\dfrac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdots$ ②

①, ②에 따라

$x^2 + \sqrt{6}x$

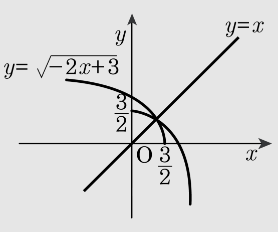
$= (4 - \sqrt{15}) + \sqrt{6} \times \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$= 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$

24. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설



함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x와 y를 서로 바꾸면
$x = \sqrt{-2y+3}$ 이므로 두 함수는 서로 역함수의
관계에 있다.
따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,
$x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.
즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의
그래프는 아래 그림과 같으므로
두 함수의 그래프의 교점은
함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 의 그래프와
직선 $y = x$의 교점과 같다.
두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$의 을
제곱하면, $-2x+3 = x^2,\ x^2+2x-3 = 0$
$(x-1)(x+3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $0 \le x \le \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 1,\ y = 1$
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$ 이므로
$a = 1,\ b = 1$
$\therefore\ a+b = 2$