

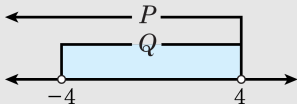
1. $x < 4$ 는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4$, $q : -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

a 에 대응하는 수가 b 에 대응해서는 안 되고
 a, b 에 대응하는 수가 c 에 대응해서는 안 되므로
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24(\text{개})$

3. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

4. $\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ 을 간단히 하여라.

① $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

② $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{3})}{(1 + 2 + 2\sqrt{2}) - 3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

5. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$ 라 할 때, 집합 $A - B^c$ 의 원소의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$n(A) = n(A_6) = 16$$

$$n(B) = n(A_8) = 12$$

$$\begin{aligned} n(A - B^c) &= n(A \cap B) \\ &= n(A_6 \cap A_8) \\ &= n(A_{24}) = 4 \end{aligned}$$

6. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 보기 중 함수 $f: X \rightarrow X$ 로 가능한 것의 개수는 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x$

㉡ $f(x) = x^2$

㉢ $f(x) = |x|$

㉤ $f(x) = \frac{1}{x}$

㉥ $f(x) = \sqrt{x}$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

㉠ $f(x) = -x$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = -1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉡ $f(x) = x^2$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = 1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉢ $f(x) = |x|$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = 1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉤ $f(x) = \frac{1}{x}$ 에서 $f(0)$ 이 정의되지 않으므로 함수가 아니다.

㉥ $f(x) = \sqrt{x}$ 에서 $f(-1) = i \notin X$ 이므로 함수가 아니다.
따라서 함수로 가능한 것은 ㉠, ㉡, ㉢의 3개다.

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로

$f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$,

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

8. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때,
 $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로
 $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$
 $3h(x) - 2 = x + 1$, $3h(x) = x + 3$
 $\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

9. 집합 $A = \{x \mid x > 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f \circ g$ 가 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x-1}$ 일 때, $(f \circ (g \circ f)^{-1})(3)$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$(f \circ (g \circ f)^{-1}) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1}) = g^{-1}$$

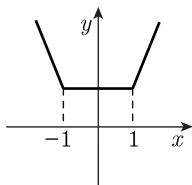
$\therefore g^{-1}(3) = k$ 라 하면

$$g(k) = 3$$

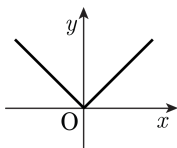
$$\Rightarrow \sqrt{2k-1} = 3 \Rightarrow k = 5$$

10. 다음 중 함수 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$ 의 그래프는?

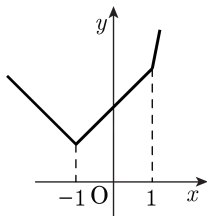
①



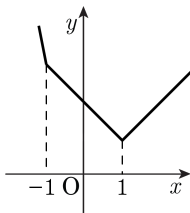
②



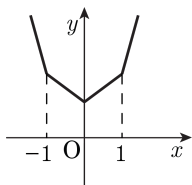
③



④



⑤



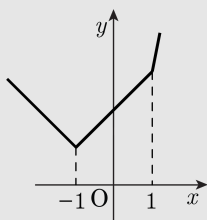
해설

$$\begin{aligned} \text{i) } x \leq -1 \text{ 일 때, } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= -(x - 1) + x - (x + 1) \\ &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } -1 < x \leq 1 \text{ 일 때 } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= -(x - 1) + x + (x + 1) \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } 1 < x \text{ 일 때 } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= (x - 1) + x + (x + 1) \\ &= 3x \end{aligned}$$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



11. 두 함수 $y = \frac{1}{x-1} + 1$, $y = m(x-1) + 1$ 의 그래프가 만날 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 고르면?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

분수함수 $y = \frac{1}{x-1} + 1$ 의 그래프는

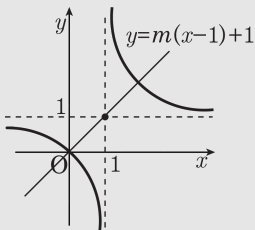
점근선이 $x = 1$, $y = 1$ 이고,

점 $(0, 0)$ 을 지난다.

$y = m(x-1) + 1$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을
지나는 직선이므로 두 함수가 만나기 위한
실수 m 의 값의 범위는

다음 그림에서 $m > 0$ 이다.

따라서, 보기 중 m 의 값이 될 수 있는 것은
⑤이다.



12. 실수 전체의 집합 R 의 부분집합 S 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 옳지 않은 것을 고르면? (단, n 은 자연수)

I. $5 \in S, 7 \in S$

II. $p \in S, q \in S$ 이면 $p + q \in S$

① $5n \in S$

② $7n \in S$

③ $12n + 1 \in S$

④ $12n + 2 \in S$

⑤ $17n + 3 \in S$

해설

① $p = q = 5$ 이면 $p + q = 5 \times 2 \in S$

$p = 5 \times 2, q = 5$ 이면 $p + q = 5 \times 3 \in S$

이와 같이 계속하면 $5n \in S$

② ①과 같은 방법으로 $7n \in S$

③ S 를 작은 수부터 차례로 써 보면

$S = \{5, 7, 10, 12, 14, \dots\}$ 이므로

$13 \notin S \leftarrow 13 = 12 \times 1 + 1$

④ $12n + 2 = 5n + 7n + 7 - 5 = 5(n - 1) + 7(n + 1)$ 이므로

①, ②에 의해서 $12n + 2 \in S$

⑤ $17n + 3 = 10n + 7n + 10 - 7$

$= 5(2n + 2) + 7(n - 1) \in S$

13. 두 집합 $A = \{x|1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 를 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 라 할 때, q 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

① 1, 3

② 1, 5

③ 1, 7

④ 3, 5

⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \leq x \leq 3\} \subset X \subset \{x|1 \leq x \leq 5\}$

$X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \leq q \leq 5$

14. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } n \text{보다 작은 자연수}\}$ 이고 집합 B 는 A 의 모든 부분 집합을 원소로 하는 집합이다. 집합 B 의 부분집합의 개수가 16 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2^k = 16 = 2^4 \quad \therefore k = 4$$

B 의 원소의 개수가 4 개 이므로, 집합 A 의 부분집합의 수는 4 개이다.

$$2^{(n \text{보다 작은 자연수 개수})} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$$

15. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $A - B^c = A \cap B$

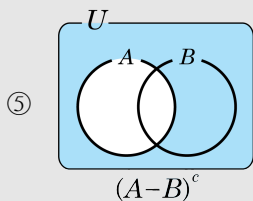
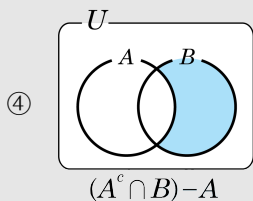
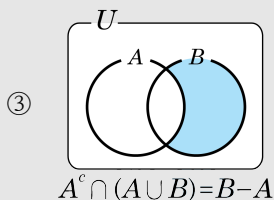
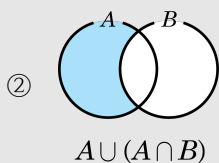
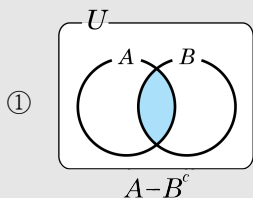
② $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$

③ $A^c \cap (A \cup B) = A - B$

④ $(A^c \cap B) - A = B \cap A^c$

⑤ $(A - B)^c = A^c \cup B$

해설



16. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 } 7\text{미만의 자연수}\}$, $B = \{2, 3, 7, 8\}$ 에 대하여 $(B - A) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 64개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 3, 7, 8\}$$

$$(B - A) \cup X = X \text{이므로 } (B - A) \subset X,$$

$$(A \cup B) \cap X = X \text{이므로 } X \subset (A \cup B),$$

$$\{7, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

따라서, 집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 7, 8을 반드시 포함하는 집합이므로

$$2^{8-2} = 2^6 = 64(\text{개}) \text{이다.}$$

17. (가) 고등학교 1 학년 630 명을 대상으로 경주와 제주도를 관광한 적이 있는지를 조사하였더니 경주를 관광한 학생은 400 명, 제주도를 관광한 학생은 330 명이였다. 이 때, 경주와 제주도를 모두 관광한 학생은 최소 m 명이고 최대 M 명이다. $m + M$ 의 값은?

① 200 명

② 330 명

③ 430 명

④ 500 명

⑤ 530 명

해설

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 730 - n(A \cup B) \dots\dots \textcircled{1}$$

i) $n(A \cap B)$ 가 최대일 경우 $\rightarrow$ 제주도를 관광한 학생이 모두 경주를 관광할 때 최대이다.

$$\therefore n(A \cap B) = 330 \dots\dots (M)$$

ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우 $\rightarrow$

$\textcircled{1}$ 에서 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이다.

$$\therefore n(A \cup B) = n(U) = 630$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 100 \dots\dots (m)$$

$$M + m = 330 + 100 = 430$$

18. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $r \rightarrow p$

② $\sim p \rightarrow \sim q$

③ $\sim p \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면

$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참

$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \rightarrow p$ 가 참

$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

19. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때

$\left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$\frac{b}{a} > 0, \frac{c}{b} > 0, \frac{a}{c} > 0$$

$$1 + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{1 \times \frac{b}{a}} = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$1 + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b}}, \quad 1 + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

$$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}} = 8$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \geq 8$$

따라서 최솟값은 8

20. 네명의 피의자가 검사에게 다음과 같이 진술하였을때 한 사람의 진술만이 참일 경우의 범인과 한 사람의 진술만이 거짓일 경우의 범인을 차례대로 구하면 ?

A : ‘나는 범인이 아니다.’

B : ‘D가 범인이다.’

C : ‘D는 거짓말을 했다.’

D : ‘C가 범인이다.’

① A와 B

② A와 D

③ B와 A

④ D와 A

⑤ C와 D

해설

1) 한 사람의 진술만 참일 경우

C가 참 : A가 범인이 된다.

D가 참 : C, A가 범인이 되어 모순

A가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순

B가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순

∴ A가 범인이다.

2) 한 사람의 진술만 거짓인 경우

A가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순

B가 거짓 : D의 진술의 참 거짓이 모순

C가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순

D가 거짓 : D가 범인

따라서 D가 범인이다.

21. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $g(0) = 5$ 가 된다. $f(2x + 1) = h(x)$ 로 하고, $h(x)$ 의 역함수를 $e(x)$ 로 할 때 $e(0)$ 의 값은 ?

① 0

② 2

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(x) = f^{-1}(x), g(0) = f^{-1}(0) = 5$$

$\therefore f(5) = 0$ 문제의 조건에서

$$f(5) = f(2 \times 2 + 1) = h(2) = 0$$

또 $e(x) = h^{-1}(x)$ 이므로 $e(0) = h^{-1}(0)$

$$\therefore h(2) = 0 \text{ 이므로 } h^{-1}(0) = e(0) = 2$$

22. A, B, C세 사람은 각각 책 읽는 속도가 다르다. A가 어떤 책을 읽기 시작하고 나서 3시간 지났을 때, B가 같은 책을 읽기 시작하였다. 그로부터 5시간 후에는 A, B가 모두 총 쪽수의 $\frac{1}{3}$ 을 읽었다. C는 이 때부터 같은 책을 읽기 시작하여 B와 동시에 책을 다 읽었다. A가 다른 책을 6시간 걸려서 다 읽는다면 C가 그 책을 모두 읽는 데 걸리는 시간은?

① 1시간 50분

② 2시간 10분

③ 2시간 30분

④ 2시간 50분

⑤ 3시간 10분

해설

B는 책의 $\frac{1}{3}$ 을 5시간 걸려서 읽었으므로

책을 다 읽는 데는 15시간이 걸린다.

A는 책의 $\frac{1}{3}$ 을 읽는 데 B보다 3시간이 더 걸리므로

책을 다 읽는 데는 $(5 + 3) \times 3 = 24$ (시간)이 걸린다.

또, B가 전체의 $\frac{2}{3}$ 를 읽는 데 걸린 시간과 C가 책 전체를 읽는 데 걸린 시간이 같으므로

C는 책을 다 읽는 데 $15 \times \frac{2}{3} = 10$ (시간)이 걸린다.

따라서 같은 책을 읽을 때, A와 C의 책 읽는 데 걸리는 시간의 비가 24 : 10이므로

C가 A가 읽은 다른 책을 읽는 데 걸리는 시간을 x 라 하면

$$24 : 10 = 6 : x$$

$$\therefore x = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}(\text{시간})$$

따라서 2시간 30분이 걸린다.

23. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 일 때, $x^2 + \sqrt{6}x$ 의 값은? (단, $0 < x < 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 의 양변에 x^2 을 곱하고 정리하면

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 1 = 0$$

근의 공식으로 풀면

$$x^2 = 4 - \sqrt{15} \quad (\because 0 < x < 1) \cdots \textcircled{1}$$

$$x = \sqrt{4 - \sqrt{15}} \quad (\because 0 < x)$$

$$= \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 따라

$$x^2 + \sqrt{6}x$$

$$= (4 - \sqrt{15}) + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$$

24. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 0

⑤ 2

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$x = \sqrt{-2y+3}$ 이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,

$x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프는

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 의 그래프와

직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$ 의 을
제곱하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$(x-1)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -3$$

그런데 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 1$, $y = 1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로

$$a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

