

1. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$

② $A < B$

③ $A \geq B$

④ $A \leq B$

⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > B^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

2. 자연수 전체의 집합 N 에 대하여 함수 $f : N \rightarrow N$ 을 $f(n) = (n \text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정의한다. 이 때, 집합 $A = \{n | f(n) = 2\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

① $1 \in A$

② $2 \in A$

③ $4 \in A$

④ $6 \in A$

⑤ $10 \in A$

해설

$f(n) = 2$ 란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

3. 함수 $y = |x - 1| - 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < m < 0$

② $-\frac{1}{2} < m < 1$

③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$

④ $0 < m < 1$

⑤ $1 < m < 2$

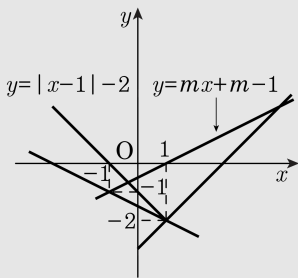
해설

$y = |x - 1| - 2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1, -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x + 1) - 1$ 에서 m 의 값에 관계 없이 점 $(-1, -1)$ 을 지나는 직선이다.

따라서, 두 그래프가 서로 다른 두

점에서 만나기 위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$



4. $2x = 3y$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}$ 의 값은? (단, $xy \neq 0$)

① $\frac{1}{3}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{2}{5}$

⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$2x = 3y \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k \rightarrow x = 3k, y = 2k$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \frac{(3k)^2 - (2k)^2}{(3k)^2 + 3k \times 2k} = \frac{5k^2}{15k^2} = \frac{1}{3}$$

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 6 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a - b$ 의 값은?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\},$

$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\},$

$\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\},$

$\{4, 5\}, \{4, 6\},$

$\{5, 6\}$

따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ (개) 이다.

집합 A 의 부분집합 중 원소가 6 개인 집합은 자기 자신인 집합 A 뿐이다.

$a = 15, b = 1$ 이므로 $a - b = 14$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B \cap A^c) = \emptyset$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $B^C = \emptyset$

② $A^C \cap B^C = \emptyset$

③ $A \cap B^C = A$

④ $A - B = A$

⑤ $A = B$

해설

$(A - B) \cup (B \cap A^c) = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이므로 $A - B = \emptyset$,
 $B - A = \emptyset$ 이다.

따라서 $A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.

7. 다음 중 명제 ' $ab = |ab|$ 이면 $a \geq 0$ 이고 $b \geq 0$ 이다.'가 거짓임을 보여주는 반례로 알맞은 것은?

① $a = 2, b = 2$

② $a = -3, b = -1$

③ $a = \frac{1}{2}, b = 1$

④ $a = -1, b = 1$

⑤ $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$

해설

$a = -3, b = -1$ 이면 $ab = |ab|$ 이지만 $a \geq 0, b \geq 0$ 은 아니다.

8. 양수 x, y 에 대하여 $\left(x + \frac{3}{y}\right) \left(3y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 3xy + 1 + 9 + \frac{3}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{3xy \cdot \frac{3}{xy}} + 10 \\ &= 2 \cdot 3 + 10 = 16\end{aligned}$$

9. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} = \frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x(x+8)} = \frac{4}{x(x+8)} \\ & = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore x(x+8) = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 1$$

10. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^3 + 2x^2 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면

$$x - 1 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 1$$

(주어진 식)

$$= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$+ 2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = -1$$

11. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}$ 의 값은?

㉠ 1

㉡ 3

㉢ 5

㉣ $\sqrt{2}$

㉤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4 + \sqrt{12}} &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 \\ &= 2 + (\sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{3} - 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} &= \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1\end{aligned}$$

12. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.

따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

13. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

㉡ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

㉢ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.

㉢ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) = n(B)$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

15. 실수 x 에 대하여 두 조건 $p : a \leq x \leq 1$, $q : x \geq -1$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$

② $a \leq 1$

③ $-1 \leq a \leq 1$

④ $a \geq -1$

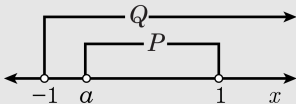
⑤ $a \leq -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(i) $a > 1$ 일 때, $P = \emptyset$ 이므로 $P \subset Q \therefore a > 1$

(ii) $a \leq 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii)에서 $a \geq -1$

16. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(1) = 1$

② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③ $f(a^2) = 2f(a)$

④ $f(a^n) = nf(a)$

⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x, a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수

17. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 에 대하여 $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ 일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

① $-\frac{1}{99}$

② $\frac{99}{100}$

③ $\frac{100}{99}$

④ 99

⑤ 100

해설

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.

즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

$$\text{따라서 } f_{100}(x) = f_{3 \times 33 + 1}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f_{100}(100) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

18. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}, \frac{1}{x} = \sqrt{3} + 2, x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}, \frac{1}{y} = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, xy = 1$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 64 - 12 = 52$$

19. 함수 $y = \frac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때,
 $a - b$ 의 값은? (단, $a < 0$)

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$$

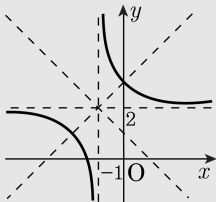
이므로

주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 2)$ 를 지나고

기울기가 ± 1 인 직선에 대하여 대칭이다.
이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로
직선의 방정식은 $y - 2 = -(x + 1)$

$$\therefore y = -x + 1$$

따라서 $a = -1$, $b = 1$ 이므로 $a - b = -2$



20. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 로 정의할 때, $(A \times B) \cup (B \times A)$ 의 원소의 개수는?

① 12 개

② 16 개

③ 20 개

④ 24 개

⑤ 28 개

해설

$A \times B$ 는 $a \in A, b \in B$ 인 모든 순서쌍 (a, b) 로 이루어지므로

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$

$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

따라서, $n(A \times B) = 12$, $n(B \times A) = 12$, $n((A \times B) \cap (B \times A)) = 4$
이므로

$$\begin{aligned} n((A \times B) \cup (B \times A)) &= n(A \times B) + n(B \times A) - n((A \times B) \cap (B \times A)) \\ &= 12 + 12 - 4 = 20 \end{aligned}$$

21. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \subset B$ 를 만족하는 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

① 50 개

② 55 개

③ 60 개

④ 65 개

⑤ 70 개

해설

원소의 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수는 2^n 이다.

i) $n(A) = 1$ 일 때

$A \subset B$ 이므로 $n(B) = 3$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$$2^3 \times 4 = 32$$

($\because n(A) = 1$ 의 경우는 4가지이다)

ii) $n(A) = 2$ 일 때

$n(B) = 2$ 의 부분집합의 개수 $2^2 \times 6 = 24$

($\because n(A) = 2$ 의 경우는 6가지이다)

iii) $n(A) = 3$ 일 때

$n(B) = 1$ 의 부분집합의 개수 $2^1 \times 4 = 8$

($\because n(A) = 3$ 의 경우는 4가지이다)

iv) $n(A) = 4$ 일 때

$\{1, 2, 3, 4\}$ 의 1 가지가 존재한다.

$$\therefore 32 + 24 + 8 + 1 = 65(\text{개})$$

22. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 A, B 가 각각

$$A = \left\{ x \mid x = 3p + \frac{1}{2}q, p \in N, q \in N \right\}, B = \{ x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 소수} \}$$

일 때, $n(A^c \cup B)^c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$A = \left\{ x \mid x = 3p + \frac{1}{2}q, p \in N, q \in N \right\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

$$B = \{ x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 소수} \} = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$n(A^c \cup B)^c = A^c \cap B = B - A = \{2, 3\} \text{ 이므로}$$

$$n(A^c \cup B)^c = 2$$

23. 함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, 유리수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{7}{6}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ $\frac{8}{3}$

해설

함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여
방정식 $f(x) = g(x)$ 의 해는 $f(x) = x$ 의 해와 같으므로
 $\frac{1}{6}x^2 + a = x$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서, $x^2 - 6x + 6a = 0$ 에서 a 가 유리수이므로 두 근은 $3 + \sqrt{2}$
, $3 - \sqrt{2}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $6a = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7$

$$\therefore a = \frac{7}{6}$$

24. $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ 일 때, $x^3 + 3x$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

$a = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ 로 놓으면

$$x = a - b$$

$$\begin{aligned}x^3 &= (a - b)^3 \\&= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \\&= (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) \\&\quad - 3 \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \cdot x \\&= 2 - 3x\end{aligned}$$

따라서, $x^3 + 3x = 2$

25. 함수 $f(x)$ 가 역함수 $g(x)$ 를 갖고 $f(1) = 1$, $g(\sqrt{x+a}-1) = x+b$ 일 때 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

g 가 f 의 역함수이므로 $g = f^{-1}$

$f^{-1}(\sqrt{x+a}-1) = x+b$ 에서

$$\sqrt{x+a}-1 = f(x+b)$$

양변에 x 대신 $x-b$ 를 대입하면

$$\sqrt{(x-b)+a}-1 = f(x-b+b)$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{x+a-b}-1$$

$f(1) = 1$ 이므로

$$f(1) = \sqrt{1+a-b}-1 = 1$$

$$\sqrt{1+a-b} = 2, 1+a-b = 4$$

$$\therefore a-b = 3$$