

1. 다음 보기에서 집합인 것을 모두 골라라.

보기

- ㉠ 유명한 야구 선수들의 모임
- ㉡ 축구를 잘하는 사람들의 모임
- ㉢ 워드 자격증이 있는 사람들의 모임
- ㉣ 우리 학교 하키 선수들의 모임

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

▶ 정답 : ㉣

해설

집합이란 특정한 조건에 맞는 원소들의 모임이다.
㉠, ㉡ ‘유명한’, ‘잘하는’의 기준이 명확하지 않음
따라서 집합인 것은 ㉢, ㉣이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 52$, $n(A \cup B) = 87$, $A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 35

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$87 = 52 + n(B) - 0$$

$$\therefore n(B) = 35$$

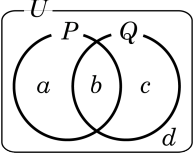
3. 전체 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 집합 $A^c - B$ 의 모든 원소의 합은?

- ① 6 ② 8 ③ 14 ④ 20 ⑤ 22

해설

$A^c - B = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로
 $U - (A \cup B)$ 와 같은 결과를 찾으면 된다.
즉, $U - (A \cup B) = (A \cup B)^c = \{6\}$

4. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ a 와 c

해설

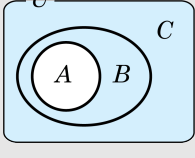
명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$ 이면 $x \in Q$ P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

5. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset B, A \cup C = U$ 를 만족할 때, 다음 중 성립하지 않은 것은?

- ① $B \cup C = U$
- ② $A^c \subset C$
- ③ $B^c \subset C$
- ④ $A \cap B^c = \emptyset$
- ⑤ $A \cup B^c = U$

해설

$A \subset B, A \cup C = U$ 를 만족하는 집합 A, B, C 의 관계는 다음 벤 다이어그램과 같다. 이때, 집합 C 는 어두운 부분을 포함하는 U 의 부분집합이므로 $A \cup B^c = U$ 는 성립하지 않는다.



6. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow r$ 가 모두 참이면 명제 $p \rightarrow r$ 도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다.

이 때, p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$p \rightarrow r, q \rightarrow r, r \rightarrow s, s \rightarrow q$ 가 참이다. $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 이다.
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

7. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

해설

① 반례 : $a = -1, b = 1$

$$|-1| - |1| \geq |-1 - 1|$$

$$|-1| - |1| \geq |-2|$$

$$1 - 1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$$

② $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

③ $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

④ $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

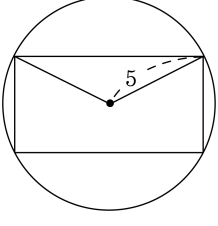
⑤ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 1$$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

8. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
가로의 길이를 a , 세로의 길이를 b 라 하면
 $a^2 + b^2 = 100$
코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$

9. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일 대응의 개수는 (가) 이고, 항등함수의 개수는 (나) 이며 상수함수의 개수는 (다) 이다. 이때, (가)~(다)에 알맞은 수를 순서대로 적은 것은?
- ① 6, 3, 3 ② 6, 3, 1 ③ 6, 1, 3
④ 27, 3, 1 ⑤ 27, 1, 3

해설

(i) 일대일 대응 $f : X \rightarrow X$ 라 하면
 $f(-1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-1, 0, 1$ 중 하나이므로 3개
 $f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$ 의 값을 제외한 2개
 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 1개이다.
따라서, 일대일 대응의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$
(ii) 항등함수 $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 의 1개
(iii) 상수함수 : $x \in X$ 일 때
 $f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$ 의 3개
따라서, (가), (나), (다)에 알맞은 수는 차례로 6, 1, 3이다.

10. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \emptyset$)

① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)

$$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 1, 2$$

x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \emptyset$ 이므로

집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$ (개)

11. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

12. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0, a)$, $(2, b)$ 를 지나야 한다.

$$a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$$

$$\therefore a + b = 4$$

13. 일대일 대응인 두 함수 f, g 에 대하여 $f(4) = 2, g^{-1}(3) = 2$ 일 때,
 $\frac{(g \circ f)^{-1}(3)}{g(2)}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{8}{3}$

해설

$$\begin{aligned} f(4) = 2, g^{-1}(3) = 2 \text{ 에서 } f^{-1}(2) = 4, g(2) = 3 \\ (g \circ f)^{-1}(3) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(3) = f^{-1}(g^{-1}(3)) \\ &= f^{-1}(2) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(g \circ f)^{-1}(3)}{g(2)} = \frac{4}{3}$$

14. 집합 $A = \{1, 2\}$ 의 모든 부분집합의 집합을 2^A 라 할 때 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

$\textcircled{\text{㉠}} A \in 2^A$	$\textcircled{\text{㉡}} A \subset 2^A$
$\textcircled{\text{㉢}} \emptyset \in 2^A$	$\textcircled{\text{㉣}} \emptyset \subset 2^A$

- ① $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$

② $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉣}}$

③ $\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$

- ④ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$

⑤ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$

해설

$A = \{1, 2\}$ 의 부분집합을 모두 구하면
 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$
따라서 이들을 원소로 하는 집합
 $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
따라서 $\{1, 2\} = A \in 2^A$ 이므로 $\textcircled{\text{㉠}}$ 는 참
 A 는 2^A 의 원소이므로 $\textcircled{\text{㉡}}$ 는 거짓
공집합 $\emptyset$ 는 2^A 의 원소이므로 $\emptyset \in A$
따라서 $\textcircled{\text{㉢}}$ 는 참.
공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$
따라서 $\textcircled{\text{㉣}}$ 는 참.
이상에서 참인 것을 모두 고르면 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$

15. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이상 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이상 } 18 \text{ 미만의 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

보기

$$X \subset A, B \subset X, n(X) = 4$$

▶ 답 : 개

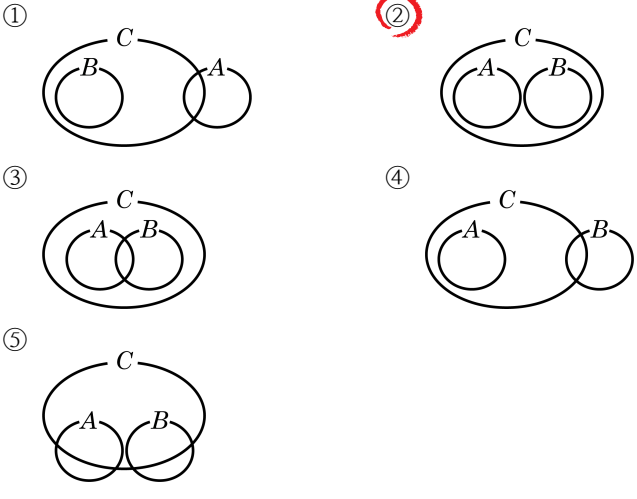
▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
 $B = \{12, 15\}$
 $X \subset A, B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$
 $\{12, 15\} \subset X \subset \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 집합이므로 $\{10, 11, 12, 15\}$, $\{10, 12, 13, 15\}$, $\{10, 12, 14, 15\}$, $\{11, 12, 13, 15\}$, $\{11, 12, 14, 15\}$, $\{12, 13, 14, 15\}$ 의 6개이다.

16. 다음 세 명제 p, q, r 가 모두 참일 때, 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면?

$p : x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다.
 $q : x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다.
 $r : x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다.



해설

$p : x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $A \subset C$
 $q : x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다. 따라서 $A \cap B = \emptyset$
 $r : x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다. 즉 $x \in B$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $B \subset C$

17. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

- ㉠ $p : |a| + |b| = 0 \quad q : ab = 0$

㉡ $p : (a - b)(b - c) = 0 \quad q : (a - b)^2 + (b - c)^2 = 0$

㉢ $p : 0 < x < y \quad q : x^2 < y^2$

㉤ $p : x < y \quad q : [x] < [y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

- ① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉤

⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉠ $p : |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0 \quad q : ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \nLeftarrow q$ 이므로 만족
㉡ $p : (a - b)(b - c) = 0 \quad a = b$ 또는 $b = c \quad q : a = b$ 그리고 $b = c \therefore p \nRightarrow q$ 이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.
㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because x, y$ 모두 양수) $p \nLeftarrow q$ ($\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족
㉤ $p \nRightarrow q$ ($\because x = 1, y = 1.5$ 일 때 $[1] = [1.5] = 1$ 일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

18. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

㉠ -3 ㉡ $-\frac{1}{3}$ ㉢ 0 ㉣ $\frac{1}{3}$ ㉤ 3

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 0$ 이다.
 $x = 1, y = -1$ 을 대입하면
 $f(0) = f(1+(-1)) = f(1) + f(-1) = 0$
 $f(-1) = -f(1), f(1) = 3$ 이므로
 $\therefore f(-1) = -3$

19. 어느 면접 시험에서 응시자가 다음 조건 중 세 가지, 두 가지, 한 가지를 만족하면 각각 A, B, C 등급을 주고, 한 조건도 만족하지 못하면 F를 주기로 하였다.

- ㉠ 복장과 용모가 단정하고 친근감이 있다.
㉡ 몸가짐이 바르고 태도가 공손하다.
㉢ 답변의 내용이 논리적이고 설득력이 있다.

그런데 전체 응시자 50명 중에서 ㉠, ㉡, ㉢을 만족한 응시자는 각각 21, 15, 26명이고, F를 받은 응시자는 12명, A를 받은 응시자는 4명이었다. 이 때, B를 받은 응시자의 수를 구하여라.

10

▶ 정답 : 16명

해설

조건 ㉠, ㉡, ㉢을 만족하는 응시자의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$n(A) = 21, n(B) = 15, n(C) = 26, n(A \cap B \cap C) = 4, \\ n((A \cup B \cup C)^c) = 12$$

$$n((A \cup B \cup C)^c) = 12$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 50 - 12 = 38$$

따라서, $n(A \cup B \cup C)$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

에서 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 28$ 이므로 두 조건만 만족하는 응시자의 수는 28명에서 세 조건을 모두 만족하는 4

명이 3번 중복되었으므로 $28 - (3 \times 4) = 16$ (명)

20. 네 명의 테니스 선수 정하, 준화, 경진, 선희가 토너먼트 경기를 하였다. 경기를 관람한 세 사람 A , B , C 에게 경기 결과를 물어 보았더니 다음과 같이 대답하였다.

A : 선희가 1 등, 경진이가 3 등을 했습니다.
 B : 준화가 2 등, 선희가 3 등을 했습니다.
 C : 정하가 1 등, 준화가 4 등을 했습니다.

이들 모두 두 선수의 순위를 대답했지만 그 두 선수의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 실제 선수들의 순위를 바르게 나열한 것은?

- ① 1등 : 경진, 2등 : 준화, 3등 : 정하, 4등 : 선희

② 1등 : 선희, 2등 : 준화, 3등 : 경진, 4등 : 준화

③ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 경진, 4등 : 선희

④ 1등 : 정하, 2등 : 경진, 3등 : 준화, 4등 : 선희

⑤ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 선희, 4등 : 경진

해설

만일, 선희가 1등한 것이 참이면 준화가 2등이고 정하가 1등이니 모순이다.
그러면, 경진이가 3등인 것이 참인데, 그렇게 되면 B 의 대답에서 선희가 3등이라는 것이 거짓이므로 준화가 2등이고 준화가 4등인 것이 거짓이므로 정하가 1등이다.
따라서 1등은 정하, 2등은 준화, 3등은 경진, 4등은 선희가 된다.