1. 다음 보기에서 집합인 것을 모두 골라라.

보기

㉠ 유명한 야구 선수들의 모임

㉡ 축구를 잘하는 사람들의 모임

㉢ 워드 자격증이 있는 사람들의 모임

㉣ 우리 학교 하키 선수들의 모임

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

해설

집합이란 특정한 조건에 맞는 원소들의 모임이다.
㉠, ㉡ '유명한', '잘하는' 의 기준이 명확하지 않음
따라서 집합인 것은 ㉢, ㉣이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A)=52$, $n(A\cup B)=87$, $A\cap B=\varnothing$ 일 때, $n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 35

해설

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$87=52+n(B)-0$
$\therefore\ n(B)=35$

3. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 집합 $A^c - B$ 의 모든 원소의 합은?

① 6 ② 8 ③ 14 ④ 20 ⑤ 22

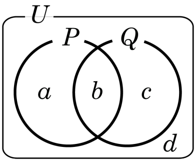
해설

$A^c - B = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로

$U - (A \cup B)$ 와 같은 결과를 찾으면 된다.

즉, $U - (A \cup B) = (A \cup B)^c = \{6\}$

4. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ a와 c

해설

명제 $p \to q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$이면 $x \in Q$ P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \to q$ 는 거짓이다.

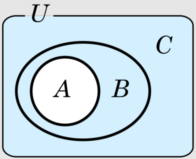
5. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset B$, $A \cup C = U$ 를 만족할 때, 다음 중 성립하지 <u>않은</u> 것은?

① $B \cup C = U$ ② $A^c \subset C$ ③ $B^c \subset C$

④ $A \cap B^c = \varnothing$ ⑤ $A \cup B^c = U$

해설

$A \subset B$, $A \cup C = U$ 를 만족하는 집합 A, B, C 의 관계는 다음 벤다이어그램과 같다. 이때, 집합 C 는 어두운 부분을 포함하는 U 의 부분집합이므로 $A \cup B^c = U$ 는 성립하지 않는다.



6. 두 명제 $p \to q$ 와 $q \to r$ 가 모두 참이면 명제 $p \to r$ 도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p는 r이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건이다.

이 때, p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ **답 :** 조건

▷ **정답 :** 충분조건

해설

$p \to r$, $q \to r$, $r \to s$, $s \to q$ 가 참이다. $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 이다.

$\therefore$ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

7. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a|-|b| \geq |a-b|$

② $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

④ $a^2+ab+b^2 \geq 0$

⑤ $a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$

해설

① 반례 : $a=-1$, $b=1$

$|-1|-|1| \geq |-1-1|$

$|-1|-|1| \geq |-2|$

$1-1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$

② $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

③ $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 \geq a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

$a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

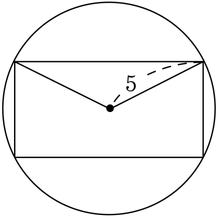
④ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+1+b^2-2b+1+1$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0 \rightarrow (\bigcirc)$

8. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$

④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$

해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b 라 하면
$a^2 + b^2 = 100$
코시-슈바르츠의 부등식에 의해
$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$
$\therefore 200 \geq (a+b)^2 \ \therefore a+b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
$2(a+b) = 20\sqrt{2}$

9. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일 대응의 개수는 (가) 이고, 항등함수의 개수는 (나) 이며 상수함수의 개수는 (다) 이다. 이때, (가)~(다)에 알맞은 수를 순서대로 적은 것은?

① 6, 3, 3　　② 6, 3, 1　　③ 6, 1, 3

④ 27, 3, 1　　⑤ 27, 1, 3

해설

(i) 일대일 대응 $f : X \to X$ 라 하면

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0,\ 1$중 하나이므로 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값을 제외한 2개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1),\ f(2)$의 값을 제외한 1개이다.

따라서, 일대일 대응의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)

(ii) 항등함수 $f(-1) = -1, f(0) = 0,\ f(1) = 1$의 1개

(iii) 상수함수 : $x \in X$일 때

$f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$의 3개

따라서, (가), (나), (다)에 알맞은 수는 차례로 6, 1, 3이다.

10. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x)=3x^2$, $g(x)=x^3+2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개　② 3 개　③ 4 개　④ 7 개　⑤ 8 개

해설

$f(x)=g(x)$ 일 때, $f(x)-g(x)=h(x)$ 로 놓으면,
$(h(x)$ 의 근의 개수$)=($집합 X 의 개수$)$
$x^3+2x-3x^2=0$
$x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)=0$
$x=0,1,2$
x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2^3-1=7$(개)

11. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

12. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid a \le y \le b\}$ 에서 $f \;:\; X \rightarrow Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0,\ a)$, $(2,\ b)$를 지나야 한다.

$a = f(0) = -1$, $b = f(2) = 5$

$\therefore\ a + b = 4$

13. 일대일 대응인 두 함수 f, g 에 대하여 $f(4)=2$, $g^{-1}(3)=2$ 일 때, $\dfrac{(g\circ f)^{-1}(3)}{g(2)}$ 의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{8}{3}$

해설

$f(4)=2$, $g^{-1}(3)=2$ 에서 $f^{-1}(2)=4$, $g(2)=3$

$$(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))$$
$$=f^{-1}(2)=4$$

$$\therefore\ \frac{(g\circ f)^{-1}(3)}{g(2)}=\frac{4}{3}$$

14. 집합 $A = \{1, 2\}$ 의 모든 부분집합의 집합을 2^A 라 할 때 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $A \in 2^A$	㉡ $A \subset 2^A$
㉢ $\varnothing \in 2^A$	㉣ $\varnothing \subset 2^A$

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉣, ㉤

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$A = \{1, 2\}$ 의 부분집합을 모두 구하면

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$

따라서 이들을 원소로 하는 집합

$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,\ 2\}\}$

따라서 $\{1, 2\} = A \in 2^A$ 이므로 ㉠는 참

A는 2^A 의 원소이므로 ㉡는 거짓

공집합 $\varnothing$는 2^A 의 원소이므로 $\varnothing \in A$

따라서 ㉢는 참.

공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$

따라서 ㉣는 참.

이상에서 참인 것을 모두 고르면 ㉠, ㉢, ㉣

15. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이상 15 이하의 자연수 $\}$, $B = \{x \mid x$는 12 이상 18 미만의 3의 배수 $\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

보기

$$X \subset A,\ B \subset X,\ n(X) = 4$$

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

$B = \{12,\ 15\}$

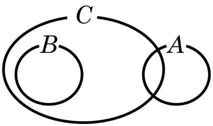
$X \subset A,\ B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$

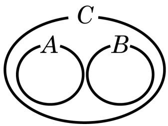
$\{12,\ 15\} \subset X \subset \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

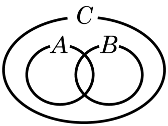
집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 12, 15 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 집합이므로 $\{10,\ 11,\ 12,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 13,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 13,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ 의 6개이다.

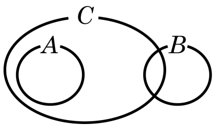
16. 다음 세 명제 p, q, r가 모두 참일 때, 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면?

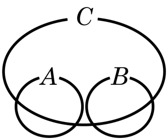
p : $x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다. q : $x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다. r : $x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다.

①


②


③


④


⑤


해설

p : $x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $A \subset C$

q : $x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다. 따라서 $A \cap B = \varnothing$

r : $x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다. 즉 $x \in B$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $B \subset C$

17. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ p : $|a|+|b|=0$ q : $ab=0$

㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ q : $(a-b)^2+(b-c)^2=0$

㉢ $p: 0<x<y$ $q: x^2<y^2$

㉣ $p: x<y$ $q: [x]<[y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ p : $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$이고 $b=0$ q : $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \nLeftarrow q$ 이므로 만족

㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$ $a=b$ 또는 $b=c$ q : $a=b$ 그리고 $b=c$ $\therefore p \nRightarrow q$이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.

㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because$ x, y 모두 양수) $p \nLeftarrow q$ ($\because$ x, y 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족

㉣ $p \nRightarrow q$ ($\because x=1, y=1.5$ 일 때 $[1]=[1.5]=1$일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

18. 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1)=3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서
$x=0,\ y=0$ 을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0),\ f(0)=0$ 이다.
$x=1, y=-1$ 을 대입하면
$f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)=0$
$f(-1)=-f(1),\ f(1)=3$ 이므로
$\therefore\ f(-1)=-3$

19. 어느 면접 시험에서 응시자가 다음 조건 중 세 가지, 두 가지, 한 가지를 만족하면 각각 A, B, C등급을 주고, 한 조건도 만족하지 못하면 F를 주기로 하였다.

㉠ 복장과 용모가 단정하고 친근감이 있다. ㉡ 몸가짐이 바르고 태도가 공손하다. ㉢ 답변의 내용이 논리적이고 설득력이 있다.

그런데 전체 응시자 50명 중에서 ㉠, ㉡, ㉢을 만족한 응시자는 각각 21, 15, 26명이고, F를 받은 응시자는 12명, A를 받은 응시자는 4명이었다. 이 때, B를 받은 응시자의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 16 명

해설

조건 ㉠, ㉡, ㉢을 만족하는 응시자의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(A) = 21$, $n(B) = 15$, $n(C) = 26$, $n(A \cap B \cap C) = 4$, $n((A \cup B \cup C)^c) = 12$

$\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 50 - 12 = 38$

따라서, $n(A \cup B \cup C)$

$= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 28$이므로 두 조건만 만족하는 응시자의 수는 28명에서 세 조건을 모두 만족하는 4명이 3번 중복되었으므로 $28 - (3 \times 4) = 16$(명)

20. 네 명의 테니스 선수 정하, 준화, 경진, 선희가 토너먼트 경기를 하였다. 경기를 관람한 세 사람 A, B, C 에게 경기 결과를 물어 보았더니 다음과 같이 대답하였다.

A : 선희가 1 등, 경진이가 3 등을 했습니다. B : 준화가 2 등, 선희가 3 등을 했습니다. C : 정하가 1 등, 준화가 4 등을 했습니다.

이들 모두 두 선수의 순위를 대답했지만 그 두 선수의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 실제 선수들의 순위를 바르게 나열한 것은?

① 1등 : 경진, 2등 : 준화, 3등 : 정하, 4등 : 선희

② 1등 : 선희, 2등 : 준화, 3등 : 경진, 4등 : 준화

③ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 경진, 4등 : 선희

④ 1등 : 정하, 2등 : 경진, 3등 : 준화, 4등 : 선희

⑤ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 선희, 4등 : 경진

해설

만일, 선희가 1등한 것이 참이면 준화가 2등이고 정하가 1등이니 모순이다.
그러면, 경진이가 3등인 것이 참인데, 그렇게 되면 B 의 대답에서 선희가 3등이라는 것이 거짓이므로 준화가 2등이고 준화가 4 등인 것이 거짓이므로 정하가 1등이다.
따라서 1등은 정하, 2등은 준화, 3등은 경진, 4등은 선희가 된다.