1. 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 5 의 배수의 모임

② 15 보다 큰 14 의 약수의 모임

③ 10 보다 큰 홀수의 모임

④ 가장 작은 자연수의 모임

⑤ 10 보다 조금 작은 수들의 모임

해설

① $\{5, 10, 15, \cdots\}$

② $\varnothing$

③ $\{11, 13, 15, \cdots\}$

④ $\{1\}$

2. 집합 $A = \{2, x+2\}$, $B = \{4, 2y\}$ 일 때, $A = B$ 를 만족시키는 x, y 에 대하여 $x - y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x - y = 1$

해설

$A = \{2, x+2\}$, $B = \{4, 2y\}$ 일 때, $A = B$ 이므로 $x+2 = 4$, $2y = 2$

$\therefore \ x = 2, \ y = 1$

$\therefore x - y = 2 - 1 = 1$

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $n(\{\varnothing\}) = 1$

㉡ $A \subset B$ 이면, $n(A) \le n(B)$ 이다.

㉢ $n(\{x \mid x$는 1보다 크고 3보다 작은 홀수$\}) = 2$

㉣ $n(A) \le n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

㉢ $n(\{x \mid x$는 1 보다 크고 3 보다 작은 홀수$\}) = 0$

㉣ 반례 : $A = \{2,\ 4\}$, $B = \{1,\ 3\}$

4. 두 집합 $A = \{4, 5, a-1\}, B = \{b-3, 6, 8\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 6\}$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$A \cap B = \{4, 6\}$ 이므로 $\{4, 6\} \subset \{4, 5, a-1\}, \{4, 6\} \subset \{b-3, 6, 8\}$ 이다.

그러면 $a - 1 = 6, b - 3 = 4$ 가 되어 $a = 7, b = 7$ 이다.

따라서 $\frac{b}{a} = \frac{7}{7} = 1$ 이다.

5. 전체집합 $U = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 $A = \{a, c, d\}$, $B = \{b, c\}$ 일 때, A^c, $A - B$ 는?

① $A^c = \{b\}$, $A - B = \{a\}$

② $A^c = \{c\}$, $A - B = \{d\}$

③ $A^c = \{b, e\}$, $A - B = \{a, d\}$

④ $A^c = \{b, c\}$, $A - B = \{a, e\}$

⑤ $A^c = \{c, d\}$, $A - B = \{a, e\}$

해설

$U = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 이므로 $A^c = \{b, c\}$ 이고 $A - B = \{a, d\}$ 이다.
따라서 ③이다.

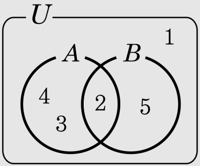
6. $U=\{1,2,3,4,5\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A-B=\{3,4\}$, $B-A=\{5\}$, $A^c\cap B^c=\{1\}$ 일 때, 집합 A 는?

① $\{2\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{2,3\}$

④ $\{2,4\}$ ⑤ $\{2,3,4\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A=\{2,3,4\}$ 이다.



7. 두 집합 $A=\{1,2,a^2+3\}$, $B=\{3,\ -3a+1,\ a^2+a+1\}$에 대하여 $A\cap B=\{1,4\}$일 때, a의 값을 구하면?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

두 집합의 교집합에 4가 들어가므로 $a^2+3=4$ 이다.
즉, a는 1, -1이 가능한데, 이를 B에 대입하면 답이 ④가 된다.

8. 두 함수 $f(x)=3x+1$, $g(x)=4x+a$에 대하여 $(g\circ f)(x)=12x+7$이 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(x)=3x+1,\ g(x)=4x+a$ 이므로

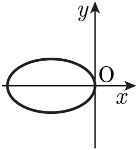
$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x)) = g(3x+1)\\ &= 4(3x+1)+a\\ &= 12x+4+a\end{aligned}$$

따라서 $12x+4+a=12x+7$ 에서 $4+a=7$

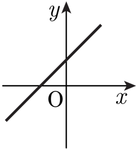
$\therefore\ a=3$

9. 다음 그래프 중 역함수를 갖는 것은?

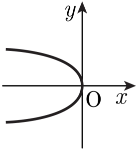
①



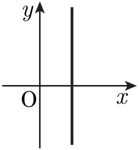
②



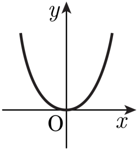
③



④



⑤



해설

역함수를 갖는 것은 일대일 대응이다. $\Rightarrow$ ②

10. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

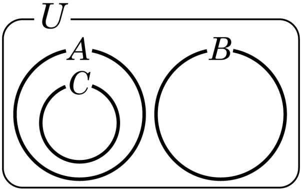
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

11. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① $A - B = B$

② $A \cup B \cup C = U$

③ $(A \cup C) \subset B$

④ $B \cap C = \varnothing$

⑤ $A^c \subset B$

해설

① $A - B = A$

② $A \cup B \cup C = A \cup B$

③ $(A \cup C) \not\subset B$

⑤ $B \subset A^c$

12. 자연수 n에 대하여 n^2 이 짝수이면 n도 짝수임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

주어진 명제의 (가) 을(를) 구하여 보면 (가) : 'n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.' 이 때, n 이 홀수이므로 $n =$ (나)(k는 0 또는 자연수) 이 때, $n^2 =$ (나)$^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ 여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다) 이므로 n^2 은 홀수이다. ∴ (가) 가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

① 역, $2k+1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k-1$, 홀수
③ 대우, $2k+1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k-1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k+1$, 0 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다'라는 성질을 이용한 것이므로

∴ (가) : 대우

n 이 홀수이므로 ∴ (나) : $2k+1$

$2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times$ (정수) 의 형태이므로

∴ (다) : 0 또는 짝수

13. 다음 조건p 는 조건q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,a, b 는 실수)

(i) p : a, b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수 (ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

14. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ **답 :** ＿＿＿＿ 조건

▷ **정답 :** 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.

15. 양수 x, y에 대하여 $\left(x+\dfrac{3}{y}\right)\left(3y+\dfrac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0,\ y>0$이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$(\text{준식}) = 3xy+1+9+\frac{3}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{3xy\cdot\frac{3}{xy}}+10$$
$$= 2\cdot 3+10 = 16$$

16. $a,\ b,\ x,\ y$가 실수이고 $a^2+b^2=2,\ x^2+y^2=8$일 때, $ax+by$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ -5

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

즉, $(ax+by)^2 \leq 2\times 8$

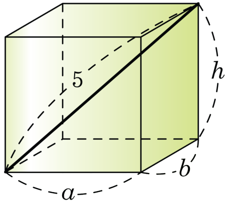
한편, $ax+by=X$라 하면, $X^2 \leq 16$

$\therefore -4 \leq X \leq 4$

따라서, $M=4,\ m=-4$

$\therefore M+m=0$

17. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5 인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

 : $20\sqrt{3}$

18. 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1) = 1$이고 $f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4$가 성립할 때, $f(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 121

해설

$f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4 = (\sqrt{f(x)} + 2)^2$

$f(1) = 1,\ f(2) = 3^2,\ f(3) = 5^2,$

$f(4) = 7^2,\ f(5) = 9^2,\ f(6) = 11^2 = 121$

19. 집합 $X=\{1,\ 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2+x+a,\ g(x)=x^2+bx+1$ 에 대하여 $f=g$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

정의역 $X=\{1,\ 2\}$ 이고 $f=g$ 이므로

$f(1)=g(1),\ f(2)=g(2)$ 가 성립한다.

$f(1)=g(1)$ 에서 $2+1+a=1+b+1$

$\therefore\ a-b=-1 \quad \cdots$ ㉠

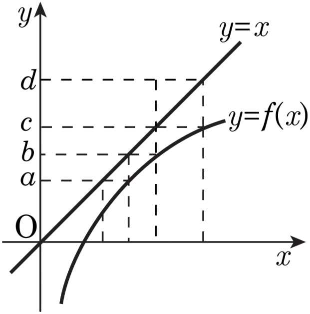
$f(2)=g(2)$ 에서 $8+2+a=4+2b+1$

$\therefore\ a-2b=-5 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=4$

$\therefore\ a+b=7$

20. 아래의 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b)=k$ 라 하면 $f(k)=b$
$f(c)=b$ 이므로 $k=c$
따라서 $f^{-1}(b)=c$

21. 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

'적어도~' 문제는 반대의 경우를 구하여 전체 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : 2^5 개 홀수만 가지고 만들 수 있는 부분집합 수⇒ $\{1,3,5\}$ 의 부분집합 수 : 2^3 개

$\therefore 32-8=24$(개)

22. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A-B)\cup(A-B^c)=A\cap B$가 항상 성립할 때, 다음 중 두 집합 A, B의 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $A \supset B$ ② $A \subset B^c$ ③ $A-B=\varnothing$

④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A\cup B^c=\varnothing$

해설

주어진 식을 정리하여 분배법칙을 사용한다. $(A-B)\cup(A-B^c)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap(B^c)^c)=(A\cap B^c)\cup(A\cap B)=A\cap(B^c\cup B)$
$=A\cap U=A$
따라서 $A=A\cap B$에서 $A\subset B$이므로 $A-B=\varnothing$

23. 집합 $A = \{2, 3 \times a, a + 3\}, B = \{a, 2 \times a + 1, 3 \times a - 2\}$ 이고 $A - B = \{6\}$ 일 때, $C = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $(A - C) \cup (B \cap C)$ 는?

① $\{2, 4\}$ ② $\{2, 5\}$ ③ $\{2, 6\}$

④ $\{2, 5, 6\}$ ⑤ $\{2, 6, 7\}$

해설

$A - B = \{6\}$ 이므로

(1) $3 \times a = 6$ 일 때, $a = 2$ 이다.

따라서 $A = \{2, 5, 6\}, B = \{2, 4, 5\}$ 이고 $C = \{1, 2, 3\}$ 이므로

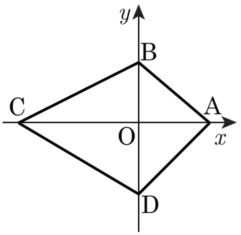
$(A - C) \cup (B \cap C) = \{5, 6\} \cup \{2\} = \{2, 5, 6\}$ 이다.

(2) $a + 3 = 6$ 일 때, $a = 3$ 이다.

따라서 $A = \{2, 6, 9\}, B = \{3, 7\}$ 이므로 $A - B = \{2, 6, 9\} \neq \{6\}$ 이므로 조건에 맞지 않다.

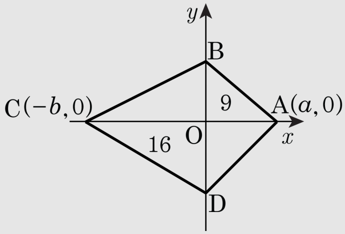
따라서 (1),(2) 에서 $(A - C) \cup (B \cap C) = \{2, 5, 6\}$ 이다.

24. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle$OAB와 $\triangle$OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37　② 40　③ 43　④ 46　⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \frac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\frac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a>0,\ b>0)$

(□ABCD의 넓이)

$= \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$= \frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\frac{18}{a}+\frac{32}{b}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot 50+\left(\frac{9b}{a}+\frac{16a}{b}\right)$

$a>0,\ b>0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

□ABCD$\geq 25+2\cdot\sqrt{\frac{9b}{a}\times\frac{16a}{b}}=49$

25. $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x) (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2007}$ ② $\dfrac{1}{2008}$ ③ $\dfrac{1}{2009}$ ④ $\dfrac{1}{4017}$ ⑤ $\dfrac{1}{4018}$

해설

$f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에서

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}$$

$$= \dfrac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\dfrac{x}{2x+1}\right) = \dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \dfrac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \dfrac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore\ f_{2008}(1) = \dfrac{1}{2008 \times 1 + 1} = \dfrac{1}{2009}$$