1. 다음 중 유한집합인 것을 모두 골라라.

㉠ $\{x \mid x$는 자연수$\}$

㉡ $\{x \mid x$는 가장 작은 자연수$\}$

㉢ $\{x \mid 0 < x < 1,\ x$는 자연수$\}$

㉣ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$

㉤ $\{x \mid x$는 1보다 작은 수$\}$

㉥ $\{x \mid x$는 100보다 작은 2의 배수$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉥

해설

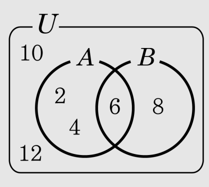
㉠ $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 이므로 무한집합이다.
㉡ 가장 작은 자연수는 1이므로 유한집합이다.
㉢ 0과 1 사이에 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.
㉣ 유한집합
㉤ 1보다 작은 수는 $0,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \cdots$ 등 무수히 많이 존재하므로 무한집합이다.
㉥ $\{2, 4, 6, 8, \cdots, 96, 98\}$ 이므로 유한집합이다.

2. 전체집합 $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{6, 8\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 의 원소의 합은?

① 15　② 17　③ 20　④ 22　⑤ 24

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{2, 4, 6, 8\})^c = \{10, 12\}$ 이므로 원소의 합은 $10 + 12 = 22$ 이다.



3. 두 조건 $A = \{1,\ a^3 - 3a\},\ B = \{a+2,\ a^2 - a\}$에 대하여 $A \cap B = \{2\}$ 가 되도록 상수 a 의 값을 정할 때, 집합 $A \cup B$의 모든 원소의 합은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$A \cap B = \{2\}$을 만족하려면 A 에서 $a^2 - a = 2,\ \ a^2 - a - 2 = 0,\ a = -1\ or\ 2$

$a = -1$ 이면, $B = \{1, 2\}$ 가 되어 $A \cap B = \{1, 2\}$ 즉, 조건에 어긋난다.

$\therefore\ a = 2$이면, $A = \{1, 2\},\ B = \{2, 4\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 4\}$

$\therefore 1 + 2 + 4 = 7$

4. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$이면 $x^3 = 1$이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$이면 $x > 0$이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$이면 $x^2 = 1$이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$ $\leftrightarrow$ $xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

5. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2($ ㉠ $) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0$, $|a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab$, $|ab|=ab$, $ab \le 0$

② $|ab|+ab$, $|ab|=-ab$, $ab \ge 0$

③ $|ab|-ab$, $|ab|=-ab$, $ab \le 0$

④ $|ab|-ab$, $|ab|=ab$, $ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab$, $|ab|=ab$, $ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

6. 두 함수 $f,\ g$ 가 $f(2)=3,\ g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

7. $(x+y):(y+z):(z+x)=6:7:5$일 때, $\dfrac{x^2-yz}{x^2+y^2}$의 값을 구하면?

① $-\dfrac{2}{5}$ ② $-\dfrac{4}{13}$ ③ $\dfrac{2}{5}$ ④ $\dfrac{4}{13}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

$$\begin{cases} x+y=6k\cdots ㉠ \\ y+z=7k\cdots ㉡ \\ z+x=5k\cdots ㉢ \end{cases} \quad (단,\ k\neq 0)$$

㉠ + ㉡ + ㉢를 해 주면 $2(x+y+z)=18k$

$\therefore\ x+y+z=9k$

$\therefore\ x=2k,\ y=4k,\ z=3k$

$\therefore\ \dfrac{x^2-yz}{x^2+y^2}=\dfrac{4k^2-12k^2}{4k^2+16k^2}=\dfrac{-8}{20}=-\dfrac{2}{5}$

8. $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}(\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a-b-c}{3a+b+c}=-\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.(단, p, q 는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq 0)$ 로 놓으면

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$

$\therefore \frac{3a-b-c}{3a+b+c}=\frac{6k-3k-4k}{6k+3k+4k}=\frac{-k}{13k}=-\frac{1}{13}$

$\therefore p=13, q=1\quad p+q=14$

9. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x}-2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x}-2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14}-2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14}-2\right)$ 를 지난다.

② $9+3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3}x \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3}x-2 = \sqrt{3(x+3)}-2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

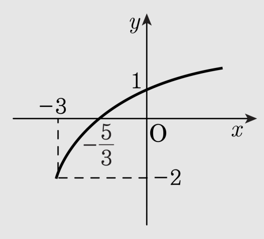
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x}-2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



10. $y = \sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3,\ \beta = 5$
$\therefore\ \alpha+\beta = 8$

11. 다음 중에서 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$의 부분 집합이 아닌 것은?

① $\varnothing$　　② $\{1,\ 3\}$　　③ $\{5\}$

④ $\{1,\ 5,\ 15\}$　　⑤ $\{1,\ 2,\ 10\}$

해설

집합 A 의 부분집합을 구하면
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{15\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 15\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 15\}$, $\{5, 15\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 15\}$, $\{3, 5, 15\}$, $\{1, 5, 15\}$, $\{1, 3, 5, 15\}$이다.
따라서 $2 \notin A$, $10 \notin A$ 이므로 $\{1, 2, 10\}$은 집합 A 의 부분집합이 아니다.

12. $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

13. 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 p의 필요조건, q는 r의 충분조건이고 r는 p의 충분조건이다. 이 때, p는 r이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q는 p의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q$ ⋯⋯ ㉠
q는 r의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$ ⋯⋯ ㉡
r는 p의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p$ ⋯⋯ ㉢
㉠, ㉡ 에서 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$이므로
$p \Rightarrow r$ ⋯⋯ ㉣
㉢, ㉣에서 $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow r$이므로 $r \leftrightarrow p$이다.
$\therefore$ 필요충분조건

14. 세 함수 f, g, h 를 다음과 같이 정의할 때, 다음 중 합성함수가 정의되지 <u>않는</u> 것은?

$f(x) = x - 1 \qquad (1 \le x \le 3)$ $g(x) = (x-1)^2 \qquad (0 \le x \le 3)$ $h(x) = x^3 \qquad (0 \le x \le 4)$

① $g \circ f$　② $h \circ f$　③ $h \circ g$
④ $h \circ g \circ f$　⑤ $h \circ f \circ g$

해설

일반적으로 함수 f, g 에서 (f 의 치역)$\subset$ (g 의 정의역) 이면 합성함수 $g \circ f$ 를 정의할 수 있다.
$f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$,
$g(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 4\}$,
$h(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 64\}$ 이므로
①, ②, ③, ④의 합성함수는 모두 정의된다.
⑤ $g(x)$ 의 치역이 $\{y \mid 0 \le y \le 4\}$이고
$f(x)$ 의 정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 3\}$ 이므로 (g 의 치역) $\not\subset$ (f 의 정의역)
따라서 $f \circ g$ 가 정의되지 않으므로 $h \circ f \circ g$ 도 정의되지 않는다.

15. 함수 $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\frac{3x+4}{x+1}$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① 3 ② $\frac{8}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

해설

$\frac{x+1}{x-2}=t$로 놓으면

$x+1=tx-2t,\ (t-1)x=2t+1$

$\therefore\ x=\frac{2t+1}{t-1}$

$$f(t)=\frac{3\times\frac{2t+1}{t-1}+4}{\frac{2t+1}{t-1}+1}=\frac{10t-1}{3t}$$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{3}$

16. 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right)=x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$\frac{x+1}{5}=t$ 로 놓으면 $x=5t-1$

$f(t)=(5t-1)+2=5t+1$ 에서

$f(x)=5x+1$

$\therefore\ f(f(x))=f(5x+1)=5(5x+1)+1$

$\qquad\qquad=25x+6$

$\therefore\ f(f(10))=25\cdot 10+6=256$

17. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5　② 3　③ 1　④ −3　⑤ −5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x+3)$
$= a(2x+3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
$2ax + 3a + b = -4x - 5$,
$2a = -4,\ 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
$h(2x+3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
$h(3) = g(0) = -5$

18. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3(\text{단, } x \geq 0)$$

① $y = \sqrt{x+1}$(단, $x \geq -1$) ② $y = \sqrt{x+2}$(단, $x \geq -2$)
③ $y = \sqrt{x+3}$(단, $x \geq -3$) ④ $y = \sqrt{x+4}$(단, $x \geq -4$)
⑤ $y = \sqrt{x+5}$(단, $x \geq -5$)

해설

$x \geq 0$이면 $y = x^2 - 3 \geq -3$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y \mid y \geq -3\}$
한편, $y = x^2 - 3$을 x에 대하여 풀면
$x^2 = y + 3$에서 $x = \pm\sqrt{y+3}$
이 때, $x \geq 0$이어야 하므로
$x = \sqrt{y+3}$(단, $y \geq -3$)
여기서, x, y를 서로 바꾸면
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+3}$(단, $x \geq -3$)

19. 함수 $y = \sqrt{a-2x}+1$ 의 역함수가 점$(5,-2)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 12$

해설

역함수가 점 $(5,-2)$ 를 지나므로
원함수는 점 $(-2,5)$ 를 지나게 된다.
따라서 $5 = \sqrt{a+4}+1$
$\therefore a = 12$

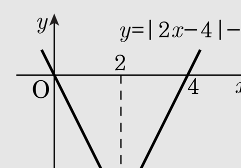
20. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

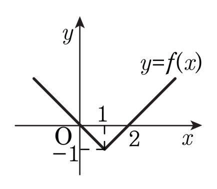
해설

$y=|2x-4|-4=|2(x-2)|-4$ 의 그래프는
$y=|2x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$

21. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)$ 는?



① $f(x) = |x+1|+1$ ② $f(x) = |x+1|-1$

③ $f(x) = |x-1|+1$ ④ $f(x) = |x-1|-1$

⑤ $f(x) = -|x-1|+1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = |x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 $y = |x|$ 에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+1$ 을 대입하면

$y+1 = |x-1|$

$y = |x-1|-1$

$\therefore f(x) = |x-1|-1$

22. 등식 $\frac{4}{11} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\frac{4}{11} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ 에서

$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2+\frac{3}{4}$ 이므로

$a=2$ 이고 $\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{3}{4}$

이 때, $b+\frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{3}$ 이므로 $b=1,\ c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 2^2+1^2+3^2 = 14$

23. 평행이동 $f : (x,\ y) \rightarrow (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y = \frac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y = \frac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

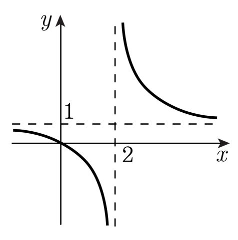
▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

분수함수 $y = \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 m 만큼,y 축의 방향으로
n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y = \frac{1}{x-m} + 1 + n$이 식이
$y = \frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$ 과 같으므로
$m = 2,\ 1+n = -1$ 에서 $n = -2$
$\therefore\ m-n = 4$

24. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?



① -2　　② -1　　③ 0

④ 1　　⑤ 2

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$ 이므로

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}=a+\dfrac{b-ac}{x+c}$ 에서 $a=1,\ c=-2$ 이다.

그리고 원점을 지나므로 $b=0$ 이다.

$\therefore\ \ a+b+c=-1$

25. 함수 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}(d>0)$ 와 $g(x)=\frac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f\circ g)(x)=x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x=m, y=n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f\circ g=I$ 이므로

$g=f^{-1}$ 또는 $g^{-1}=f$

$y=g(x)$ 의 역함수를 구하면

$y=\frac{x+2}{3x+4}\Leftrightarrow 3yx+4y=x+2$

$\Leftrightarrow (3y-1)x=-4y+2$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4y+2}{3y-1}$

$\therefore y=g^{-1}(x)=\frac{-4x+2}{3x-1}$,

$$\begin{aligned} f(x)&=g^{-1}(x)\\ &=\frac{-4x+2}{3x-1}\\ &=\frac{ax+b}{cx+d}(d>0)\text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{4x-2}{-3x+1}\\ &=\frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}\\ &=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$

$\therefore m=\frac{1}{3}$, $n=-\frac{4}{3}$

$\therefore m+n=-1$

26. $1 \le x \le a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

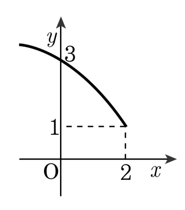
▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \le x \le a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x=1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

27. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$의 값은?



① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 그림은 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를
x축 방향으로 2, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1 = \sqrt{a(x-2)}$
즉 $y = \sqrt{a(x-2)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$3 = \sqrt{-2a}+1$
$\sqrt{-2a} = 2,\ -2a = 4$
$\therefore a = -2$
$\therefore y = \sqrt{-2x+4}+1$
$\therefore a+b+c = (-2)+4+1 = 3$

28. 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots,\ 18\}$ 를 조건제시법으로 올바르게 나타낸 것을 모두 골라라.

> ㉠ $A = \{x \mid 0 \le x \le 18$인 정수$\}$
>
> ㉡ $A = \{x \mid 1 < x \le 17$인 짝수$\}$
>
> ㉢ $A = \{x \mid x$는 20보다 작은 짝수$\}$
>
> ㉣ $A = \{x \mid x$는 18 이하의 짝수$\}$
>
> ㉤ $A = \{x \mid x$는 19 미만의 짝수$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots,\ 18\}$
$= \{x \mid x$는 20보다 작은 짝수$\}$
$= \{x \mid x$는 19 미만의 짝수$\}$
$= \{x \mid x$는 18 이하의 짝수$\}$

29. 집합 $A = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{30}{n},\ x\text{와 } n\text{은 모두 자연수} \right\}$ 일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x 가 자연수가 되려면 n 은 30 의 약수가 되어야 한다.
$n = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30$ 일 때,
$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$
$\therefore\ n(A) = 8$

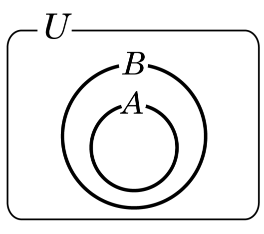
30. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B \neq B \cap A$
② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$
③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$
④ $n(A \cap B \cap \varnothing) = 0$
⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \cap B = B \cap A$
② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$
③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

31. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 벤 다이어그램을 만족할 때, 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)



① $A - B = \varnothing$ ② $B \cap A^c = \varnothing$ ③ $B^c \subset A^c$
④ $U \subset (A \cup B)$ ⑤ $U - A^c = B$

해설

② $B \cap A^c \neq \varnothing$
④ $(A \cup B) \subset U$
⑤ $U - A^c = A$

32. $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, 10\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A, (A - B) \cap X = A - B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4 개　② 8 개　③ 16 개　④ 32 개　⑤ 64 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A$ 이고 $(A - B) \cap X = A - B$ 이므로 $(A - B) \subset X$ 이다. $\therefore (A - B) \subset X \subset A$
$A - B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X는 6, 8, 10 을 반드시 포함하는 A 의 부분집합이다.
따라서 $2^{5-3} = 2^2 = 4$(개) 이다.

33. 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

> A : 범인은 B이다.
> B : 범인은 D이다.
> C : 나는 범인이 아니다.
> D : B 는 거짓말을 하고 있다.

① A, D　② B, C　③ C, B　④ D, C　⑤ B, A

해설

B가 옳은 진술이라면 범인은 D가 되고 C도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B는 거짓이 되고, D가 옳은 진술이 된다. D를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C다.

34. 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c에 대하여, $a^2+b^2=c^2$이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

주어진 명제의 대우는 '세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$'이므로 $a^2+b^2=3m+$[㉠], $c^2=3n+$[㉡] $\therefore$ $a^2+b^2 \neq c^2$ (단, m, n은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가 [㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢] 이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

① 1, 0, 참　② 1, 2, 거짓　③ 2, 1, 참
④ 2, 0, 참　⑤ 0, 1, 참

해설

(대우 'a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2+b^2 \neq c^2$'
이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.
$a=3p\pm1$, $b=3q\pm1$, $c=3r\pm1$ 이면 $a^2=3(3p^2\pm2p)+1, b^2=3(3q^2\pm2q)+1$ 이므로
$a^2+b^2=3m+2$ (m 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
$\therefore$ [㉠] $=2$
그리고 $c^2=3(3r^2\pm2r)+1$ 이므로
$c^2=3n+1$ (n은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
$\therefore$ [㉡] $=1$
$\therefore a^2+b^2 \neq c^2$
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
$\therefore$ [㉢] $=$ 참

35. 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$ ② $P \geq Q$ ③ $P=Q$
④ $P<Q$ ⑤ $P \leq Q$

해설

a, b는 양수이고 $a+b=1$이므로
$0<a<1$, $0<b<1$
또 $b=1-a$이므로
$P=a^3+b^3=a^3+(1-a)^3$
$=a^3+1-3a+3a^2-a^3$
$=3a^2-3a+1$
$Q=a^2+b^2=a^2+(1-a)^2$
$=a^2+a^2-2a+1$
$=2a^2-2a+1$
$P-Q=3a^2-3a+1-2a^2+2a-1$
$=a^2-a=a(a-1)$
그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$
$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

36. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$ 이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 이므로

$x^2-x+1=t$로 치환 $t\geq\dfrac{3}{4}$ 하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\dfrac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}$

여기서 $t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\geq\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$ 의 최솟값은 2 이고

$\dfrac{t}{t^2+1}$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

37. 집합 $X = \{-1, 1\}$을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합 R를 공역으로 하는 함수
$f(x) = |x|, g(x) = ax - 2$에 대하여 $f(-1) = g(-1)$일 때, $a + g(1)$의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$f(-1) = g(-1)$에서 $|-1| = -a - 2$, $1 = -a - 2$
$\therefore a = -3$
이때, $g(1) = -3 - 2 = -5$
$\therefore a + g(1) = -3 - 5 = -8$

38. 두 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

39. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6　　② 4　　③ 2　　④ 1　　⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore\ b = \sqrt{k} - a$

$a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$

$\therefore\ 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$

$a,\ k$가 정수이므로

$3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$

연립하여 풀면

$\therefore a = 2,\ \ k = 6$

40. $f(x)$는 유리수를 계수로 하는 x의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$일 때, $a - b$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ 0　⑤ 3

해설

$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4\times3}} = 2+\sqrt{3}$
$\therefore\ f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2+\sqrt{3})$
$= (2+\sqrt{3})^2 + a(2+\sqrt{3}) + b$
$= (7+2a+b) + (4+a)\sqrt{3} = 0$
그런데, $7+2a+b,\ 4+a$는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서
$7+2a+b = 0,\ 4+a = 0 \quad \therefore\ a = -4,\ b = 1$
$\therefore\ a - b = -4 - 1 = -5$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3}$은 $x^2+ax+b=0$의 한 근이고, $a,\ b$가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해
두 근의 합 $4 = -a$, 두 근의 곱 $1 = b$
$\therefore\ a - b = -4 - 1 = -5$

41. 집합 $B = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 의 부분집합의 열을 $B_1,\ B_2,\ B_3, \cdots, B_{16}$ 이라 하고, B_1 의 원소의 총합을 a_1 , B_2 의 원소의 총합을 $a_2, \cdots,$ B_{16} 의 원소의 총합을 a_{16} 이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{16}$ 의 값은?

① 16　　② 18　　③ 20　　④ 22　　⑤ 24

해설

집합 $B = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 의 부분집합의 개수는 모두 16개인데 실제로 나열해 보지 않고서도 해결할 수 있다.
즉, -1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
0 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
2 를 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개이므로 원소의 총합은
$8(-1 + 0 + 1 + 2) = 16$

42. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $A \subset B \subset X$를 만족하는 두 집합 $A,\ B$의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

① 8 개　② 16 개　③ 24 개　④ 27 개　⑤ 32 개

해설

$A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 $A,\ B$ 를 집합 B 의 원소의 개수에 따라 분류해 보면

i) $n(B)=0$ 일 때, $B=\varnothing$ 이면 $A=\varnothing$ 이므로 1가지이다.

ii) $n(B)=1$ 일 때, $B=\{1\},\ \{2\},\ \{3\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 2가지씩이므로 6가지이다.

iii) $n(B)=2$ 일 때, $B=\{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \{3,\ 1\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 4가지씩이므로 12가지이다.

iv) $n(B)=3$ 일 때, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$ 이면 A 는 8가지이다.

따라서 두 집합 $A,\ B$ 의 순서쌍 $(A,\ B)$ 의 개수는 $1+6+12+8=27$ (개) 이다.

43. 집합 P 의 모든 원소의 합을 $s(P)$, 집합 P 의 부분집합을 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_N$ 으로 정의한다. 두 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a+2 | a \in A\}$ 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A, B 의 모든 원소의 합을 구하여라.

- $A \cap B = \varnothing$
- $s(B_1) + s(B_2) + s(B_3) + \cdots + s(B_N) = 128$

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

집합 B 를 원소나열법으로 나타내면 $B = \{a_1+2, a_2+2, a_3+2, a_4+2\}$,
집합 B 의 모든 부분집합의 원소의 합에서 각 원소는 2^{4-1} 번 나오므로
$s(B_1) + s(B_2) + s(B_3) + \cdots + s(B_N) = 2^{4-1} \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 8) = 128 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$,
또, $A \cap B = \varnothing$ 이므로 집합 A, B 의 모든 원소의 합은
$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 8) = 24$

44. 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{1,\ 3,\ 5\}$ 에서 $A\star B=(A-B)\cup(B-A)$ 라 약속할 때, 집합 $(A\star B)\star C$ 의 원소의 합은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2\}$, $C=\{1,\ 3,\ 5\}$ 에서

$A\star B=(A-B)\cup(B-A)=\{3,4\}\cup\varnothing=\{3,4\}=D$ 라 하면

$$\begin{aligned}(A\star B)\star C&=D\star C\\&=(D-C)\cup(C-D)\\&=\{4\}\cup\{1,5\}=\{1,4,5\}\end{aligned}$$

원소의 합은 $1+4+5=10$

45. 집합 A, B는 연속된 자연수 6개를 원소로 갖는 집합이다. A, B의 원소의 총합을 $f(A)$, $f(B)$라 할때, $\left|f(A)-f(B)\right|$를 구하면? (단, $n(A \cap B)=3$)

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

해설

$A=\{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5\}$라 하면
$n(A \cap B)=3$이므로
$B=\{a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2\}$라 할 수 있다.
$f(A)=6a+15$, $f(B)=6a-3$
$\therefore \left|f(A)-f(B)\right|=|6a+15-6a+3|=18$

46. 세 양수 x, y, z가 $x+y+z = 1$을 만족할 때, $\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

(준식)$= 8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$
$+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz}$

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{xyz}$ 이므로

(준식)$= 8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{xyz}$

$x+y+z=1$ 이므로

$\frac{1}{3}=\frac{x+y+z}{3}\geq 3\sqrt{xyz}$

$\left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ xyz\leq\frac{1}{27}\quad\therefore\ \frac{1}{xyz}\geq 27\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 9\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 (준식)$\geq 8+36+81=125$

47. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4)+3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1)\neq 0$)

① $2f(6)$ ② $2f(7)$ ③ $f(7)$ ④ $f(8)$ ⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2)=(n+1)+f(n)$ 을 이용하여 $f(4)+f(5)=f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned}2f(4)+3f(5)&=f(4)+f(5)+f(4)+f(5)+f(5)\\&=f(6)+f(6)+f(5)\end{aligned}$$

또 $f(5)+f(6)=f(7), f(6)+f(7)=f(8)$ 이므로

$2f(4)+3f(5)=f(6)+f(7)=f(8)$ 이다.

48. 0 이 아닌 실수 $a,\ b,\ c$ 가 다음 관계를 만족한다. $a^2+b^2+c^2=1$, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$ 일 때, $a+b+c$ 의 값들의 합을 구하면?

① -1　② 1　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=-3$ 에서

$a+b+c=k\cdots$㉠으로 놓으면

$\frac{k-a}{a}+\frac{k-b}{b}+\frac{k-c}{c}=-3$

$k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

$\therefore\ k=0$ 또는 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\cdots$㉡

㉡ 에서 $ab+bc+ca=0$

㉠에서 $k^2=(a+b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$

$\therefore\ k=\pm1$

$\therefore\ k=0$ 또는 ±1

따라서 k 값들의 합은 0 이다.

49. 다음은 제품 p_n 을 만드는 방법과 소요 시간에 대한 설명이다. (단, $n = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$)

> 가) 제품 p_1 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 1이다.
> 나) 제품 p_1 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_2 가 한 개 만들어진다.
> 다) 제품 p_n 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_{2n} 이 한 개 만들어진다.

이때 p_n 을 두 개 연결하는 데 걸리 는 시간은 $2n$ 이다. 이때, 제품 p_{16} 을 한 개 만드는데 걸리는 시간은?

① 32 ② 64 ③ 80 ④ 96 ⑤ 112

해설

$n = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 이고 $p_1 \rightarrow 1$
$p_2 \rightarrow p_1 p_1$ 연결 : $1 + 1 + 2 = 4$
$p_4 \rightarrow p_2 p_2$ 연결 : $4 + 4 + 2 \times 2 = 12$
$p_8 \rightarrow p_4 p_4$ 연결 : $12 + 12 + 2 \times 4 = 32$
$p_{16} \rightarrow p_8 p_8$ 연결 : $32 + 32 + 2 \times 8 = 80$

50. 실수 a가 $0 < a < 2$이고, 실수 $x,\ y$가 연립방정식

$\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ ax - y = a^3 \end{cases}$ 을 만족시킬 때,

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \cdots ㉠ \\ ax - y = a^3 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $-$ ㉡ $\times a$ 하면

$(4 - a^2)x = 16 - a^4$

$\therefore x = 4 + a^2,\quad y = 4a$

$\therefore \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-2)^2}$

$= 4\ (\because 0 < a < 2)$