1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면?

① 아주 작은 정수들의 모임

② 성이 김씨인 중학생들의 모임

③ 중간고사 수학 성적이 80점 이상인 학생들의 모임

④ 0보다 작은 음수들의 모임

⑤ 착한 학생들의 모임

해설

'아주 작은' 혹은 '착한'의 기준은 객관적이지 못하므로 집합이 될 수 없다.

2. 두 집합 $A = \{x,\ y,\ \{x,\ y,\ \varnothing\}\}$, $B = \left\{x \mid x\text{는 } 9\text{의 약수}\right\}$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$A = \{x,\ y,\ \{x,\ y,\ \varnothing\}\}$,
$B = \left\{x \mid x\text{는 } 9\text{의 약수}\right\} = \{1,\ 3,\ 9\}$ 에서
$n(A) = 3$ 이고, $n(B) = 3$ 이므로
$n(A) - n(B) = 0$ 이다.

3. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 일 때, $A\cup X=A$ 이고 $(A\cap B)\cup X=X$ 를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 4 개

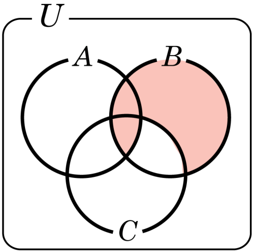
해설

$(A\cap B)\subset X\subset A$ 이므로

$\{2,\ 4\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이다.

집합 X는 2, 4를 원소로 갖는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 부분집합이므로 그 개수는 $2^{4-2}=2^2=4$(개) 이다.

4. 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합은?



① $(A \cup B) - (B \cap C)$　　② $(B \cup C) \cap A^c$

③ $(A \cap C)^c \cup B$　　④ $(A - C) \cap B$

⑤ $(A \cup C^c) \cap B$

해설

색칠한 부분을 집합으로 표현하면 $(A \cap B) \cup (B - C) = (A \cap B) \cup (B \cap C^c) = (A \cup C^c) \cap B$

5. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 $A = \{3, 5, 9\}$, $B = \{3, 7\}$ 에 대하여 $B \cap A^c$ 은?

① $\{1\}$　② $\{5\}$　③ $\{7\}$　④ $\{5, 7\}$　⑤ $\{5, 9\}$

해설

$B \cap A^c = B - A = \{7\}$ 이다.

6. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \le 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \ge 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

7. $X = \{x|x$는 10이하의 자연수$\}$, $Y = \{y|y$는 정수$\}$일 때, 함수 $f : X \to Y$가 $f(x) = (x$의 양의 약수의 갯수$)$로 정의할 때, 함수 f의 치역의 원소의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$f(1) = 1, f(2) = f(3) = f(5) = f(7) = 2,$
$f(4) = f(9) = 3$
$f(6) = f(8) = f(10) = 4$
$\therefore f(X) = \{1, 2, 3, 4\}$

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \le 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases}$$ 가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 a, b

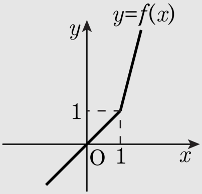
의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

① $a = 1,\ b = -1$　② $a = 1,\ b = 1$　③ $a = 2,\ b = -1$

④ $a = 2,\ b = 0$　⑤ $a = -1,\ b = 2$

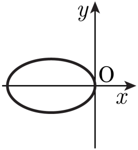
해설

f가 일대일대응이 되려면
$y = f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.
즉, 직선 $y = ax + b$가
점 $(1,\ 1)$을 지나야 하므로
$a + b = 1$ $\cdots$ ㉠
또, 직선 $y = x$의 기울기가 양이므로 직선
$y = ax + b$의 기울기도 양이어야 한다.
$\therefore\ a > 0$ $\cdots$ ㉡
따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을
모두 만족시키는 것은 ③이다.

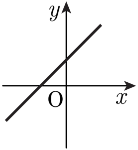


9. 다음 그래프 중 역함수를 갖는 것은?

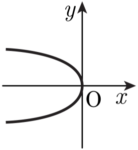
①



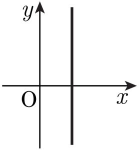
②



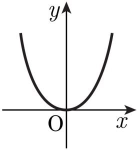
③



④



⑤



해설

역함수를 갖는 것은 일대일 대응이다. ⇒ ②

10. 함수 $f(x)=ax+3$ 에 대하여 $f^{-1}=f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1}=f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$f^{-1}\circ f=f\circ f$

이때, $f^{-1}\circ f=I$(I는항등함수) 이므로 $f\circ f=I$

즉 $(f\circ f)(x)=x$

$\therefore (f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+3)$

$=a(ax+3)+3=a^2x+3a+3=x$

따라서 $a^2=1,\ 3a+3=0$ 이므로 $a=-1$

11. 다음 식을 간단히 하면?

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}$$

① 1　② x　③ $\dfrac{1}{x}$　④ $\dfrac{1}{1-x}$　⑤ $-x$

해설

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}$$

$$=1-\frac{x-1}{x-1-x}$$

$$=1+x-1=x$$

12. $3x = 2y$ 일 때, $\dfrac{2xy + y^2}{x^2 + xy}$ 의 값은?

① $\dfrac{15}{7}$ ② $\dfrac{17}{8}$ ③ $\dfrac{19}{9}$ ④ $\dfrac{21}{10}$ ⑤ $\dfrac{23}{11}$

해설

$$3x = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x$$

$$\therefore \quad \frac{2xy + y^2}{x^2 + xy} = \frac{3x^2 + \frac{9}{4}x^2}{x^2 + \frac{3}{2}x^2} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{21}{10}$$

13. 다음 중 무리함수 $y=\sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}}$의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$　　② $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$

③ $\{x \mid x \geq 1\}$, $\{y \mid y \leq 0\}$　　④ $\{x \mid x \leq 1\}$, $\{y \mid y \geq 0\}$

⑤ $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \leq 1\}$

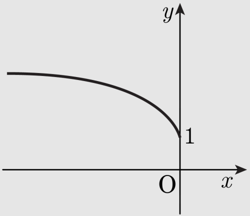
해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}} \\ &= \sqrt{-3x+1+2\sqrt{(-3x)\cdot 1}} \\ &= \sqrt{-3x}+1 \end{aligned}$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$



14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

15. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $(A - B) \cup X = X$, $A \cup X = A$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 8개 ⑤ 32개

해설

$(A - B) \cup X = X$, $\quad \therefore \{1,\ 2,\ 3\} \subset X$

$A \cup X = A$, $\quad \therefore X \subset A$

X 는 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 A 의 부분집합이다.

$\therefore 2^2 = 4$(개)

16. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ a+1\}$, $B=\{4,\ 5,\ a\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{3,\ 4\}$ 일 때, $n(A-B)$ 를 구하면? (단, a 는 상수)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$B=\{4,\ 5,\ a\}$ 이고 $A\cap B=\{3,\ 4\}$ 이므로 $a=3$
이 때, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$
$A-B=\{1,\ 2\}$
$\therefore n(A-B)=2$

17. 다음 중 대우가 참인 것을 고르면?

① 평행사변형은 직사각형이다.

② 2 의 배수는 4 의 배수이다.

③ m, n 이 홀수이면 $m+n$ 은 홀수이다.

④ $x^2-9=0$ 이면 $x-3=0$ 이다.

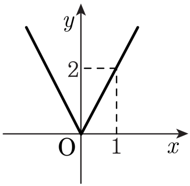
⑤ $x \geq 2$ 이면 $x^2 \geq 4$ 이다.

해설

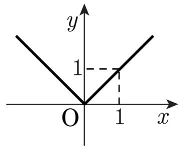
⑤ 최솟값 2 를 제곱하면 4이므로 참이다.

18. 다음 중 함수 $y = x + |x|$의 그래프는?

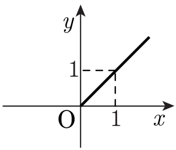
①



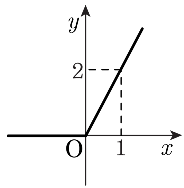
②



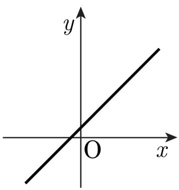
③



④



⑤



해설

$y = x + |x|$ 에서

$x \leq 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고

$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

19. 모든 실수 x에 대하여 다음 분수식 $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{(x+2)^2}$가 항상 성립하도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -1

해설

주어진 식의 우변을 통분하면

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}$$
$$=\frac{a(x+2)^2+b(x+1)(x+2)+c(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$\therefore\ 1=a(x+2)^2+b(x+1)(x+2)+c(x+1)$

이것이 x에 대한 항등식이어야 하므로

양변에 $x=-1$을 대입하면 $1=a$

$x=-2$를 대입하면 $1=-c$

즉, $c=-1$

$x=0$을 대입하면 $1=4a+2b+c$

$a=1,\ c=-1$이므로 $1=4+2b-1$

$\therefore\ b=-1$

$\therefore\ a+b+c=1-1-1=-1$

20. $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\dfrac{37}{13}$ 을 만족시키는 정수 x, y, z에 대하여 $x+y+z$의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

2를 우변으로 이항하고 정리하면

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\frac{11}{13}$$

역수를 취하면 $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\dfrac{13}{11}=1+\dfrac{2}{11}$

$\therefore x=1$

또, $y+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{2}=5+\dfrac{1}{2}$

$\therefore y=5, z=2$

따라서 $x+y+z=8$

21. $x+\frac{1}{x}=2$일 때, $x^2-\frac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=2^2-4=0$$

$$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\times 2=0$$

22. $-1 < a < 3$일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt{a^2+2a+1}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{a^2-6a+9}$$

① a ② $a-2$ ③ 4

④ $3a+2$ ⑤ $a+2$

해설

$$\sqrt{(a+1)^2}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{(a-3)^2}$$
$$=|a+1|+(a-2)+|a-3|$$
$$=(a+1)+(a-2)-(a-3)$$
$$=a+1-2+3=a+2$$

23. $6-\sqrt{3}$의 정수 부분을 x, 소 수부분을 y라 할 때 $\frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6-\sqrt{3}=4+(2-\sqrt{3})\ (\because 0<2-\sqrt{3}<1\ )$

$\therefore x=4,\ y=2-\sqrt{3},\ \frac{1}{y}=2+\sqrt{3}$

$\therefore y+\frac{1}{y}=4,$

$y^3+\frac{1}{y^3}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^3-3\left(y+\frac{1}{y}\right)=52$

$\therefore \frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=\frac{1}{4}\cdot 52=13$

24. 유리수 a ,b가 다음 두 조건을 만족할 때, b의 값은?

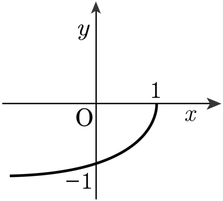
㉠ $(a+\sqrt{3})(3+b\sqrt{3})=-3(1+\sqrt{3})$ ㉡ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \neq \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건 ㉠에서 좌변을 정리하면
$(3a+3b)+(ab+3)\sqrt{3}=-3-3\sqrt{3}$ 무리식의 상등에서 $3a+3b=-3$, $ab+3=-3$
$\therefore\ a+b=-1,\ ab=-6$
따라서 $a,\ b$는 $x^2+x-6=0$의 두 근이다.
$(x-2)(x+3)=0\quad\therefore\ x=2,\ -3$
조건 ㉡에서 $a>0,\ b<0$이므로 $b=-3$

25. $y = -\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?



① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$y = -\sqrt{ax+b}+c = -\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

점$(1,0)$에서 시작이므로 $-\frac{b}{a} = 1,\ c = 0$

$\therefore b = -a,\ c = 0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y = -\sqrt{ax-a}$ 이고

주어진 그래프가 점$(0,-1)$를 지나므로

$-1 = -\sqrt{-a}$

양변을 제곱을 하면 $1 = -a$

$\therefore\ a = -1$

따라서 $a = -1,\ b = 1,\ c = 0$ 이므로

$a+b+c = -1+1+0 = 0$

26. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2p+1$, p^2, $2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6$, $p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

27. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a+19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2,\ a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

28. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1} - 2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n = ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1} - 2a_n\right\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
$= (3ar - 2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$
따라서 $r = 2$이고 $3ar - 2a = 12$이다.
$6a - 2a = 12,\ 4a = 12$
$\therefore\ a = 3$

29. 부피가 8 이고 겉넓이가 28 인 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이 직육면체의 모서리의 길이의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a,\ ar,\ ar^2$ 이라 하면

$(\text{부피}) = a\cdot ar\cdot ar^2 = (ar)^3 = 8$

$\therefore\ ar = 2 \cdots ㉠$

$(\text{겉넓이}) = 2(a\cdot ar + ar\cdot ar^2 + ar^2\cdot a)$

$= 2\left\{a\cdot ar + (ar)^2\cdot r + (ar)^2\right\}$

$= 2(2a + 4r + 2^2)$

$= 4a + 8r + 8 = 28$

$\therefore\ a + 2r = 5\ \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1,\ r = 2$ 또는 $a = 4,\ r = \dfrac{1}{2}$

따라서 (가로의 길이, 세로의 길이, 높이)가 $(1,\ 2,\ 4)$ 또는 $(4,\ 2,\ 1)$ 이므로 이 직육면체의 모서리의 길이의 합은 $4(1 + 2 + 4) = 28$

30. 두 수 $A,\ B$에 대하여 $A=2^{10},\ B=5^{10}$일 때, 두 수 $A,\ B$의 곱 AB의 양의 약수의 총합을 A와 B의 식으로 나타낸 것은?

① $(2A+1)(5B+1)$ ② $(5A-1)(5B-1)$

③ $\frac{1}{4}(2A+1)(5B-1)$ ④ $\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$

⑤ $\frac{1}{2}(2A-1)(5B-1)$

해설

$AB=2^{10}\cdot5^{10}$

따라서 AB의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+\cdots+5^{10})$

$=\dfrac{2^{11}-1}{2-1}\times\dfrac{5^{11}-1}{5-1}$

$=(2\cdot2^{10}-1)\times\dfrac{1}{4}(5\cdot5^{10}-1)$

$=(2A-1)\times\dfrac{1}{4}(5B-1)$

$=\dfrac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$

31. 실수로 이루어진 집합 B가 다음의 두 조건을 만족할 때, 다음 설명 중 옳은 것은? (단, $n(B)$는 집합 B의 원소의 개수를 나타낸다.)

㉠ $n(B)=1$	㉡ $x \in B$ 이면 $\frac{1}{x} \in B$

① 집합 B 는 $\varnothing$ 뿐이다.

② 집합 B 는 두 개 있다.

③ $\{-1,\ 1\} \subset B$

④ $B=\{0\}$

⑤ $B \not\subset \{-1,\ 0,\ 1\}$

해설

집합 B의 원소의 개수가 1개이므로 집합 B 는 원소가 하나뿐인 유한집합이다.

또, $x \in B$ 이면 $\frac{1}{x} \in B$ 에서

$x=\frac{1}{x}$, $x^2=1$ $\therefore$ $x=\pm 1$ 따라서 $B=\{1\}$ 또는 $\{-1\}$이므로 집합 B 는 두 개 있다.

32. 전체집합 $U = \{x|x$는 20 이하의 자연수$\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x$는 12 의 약수$\}$,
$B = \{x|x$는 3 의 배수$\}$,
$C = \{x|x$는 4 의 배수$\}$ 에 대하여 $(A - B) \cap C^C$ 을 원소나열법으로 나타내어라.

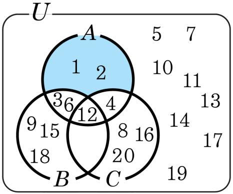
▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 18, 19, 20\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ 이므로 $(A - B) \cap C^C$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

$\therefore (A - B) \cap C^C = \{1, 2\}$



33. 어느 반의 63%의 학생은 공부를 잘하고 76%의 학생은 운동을 잘한다. 운동도 잘하고 공부도 잘하는 학생수의 최대, 최소 %(백분율)는 각각 얼마인가 ?

① 최대 89%, 최소 13%

② 최대 63%, 최소 39%

③ 최대 76%, 최소 37%

④ 최대 39%, 최소 24%

⑤ 최대 76%, 최소 39%

해설

전체집합을 U , 공부를 잘하는 학생의 집합을 A , 운동을 잘하는 학생의 집합을 B 라 하면 공부도, 운동도 잘하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다. $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \subset B$ 일 때 최대가 되고, $A \cap B$ 의 원소의 개수는 $A \cup B = U$ 일 때 최소가 된다. $A \subset B$ 일 때 $A \cap B = A$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) = 63\%$

$A \cup B = U$ 일 때 $n(A \cup B) = 100\%$ 이므로 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(U) = 63 + 76 - 100 = 39(\%)$

따라서, 최대 63%, 최소 39%

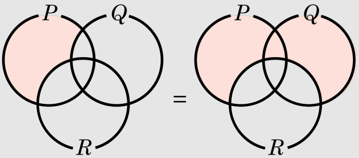
34. 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라고 하자. $P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p\rightarrow q$　　② $r\rightarrow q$　　③ $q\rightarrow p$

④ $p\rightarrow r$　　⑤ $q\rightarrow r$

해설

$P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q\cup R=R\leftrightarrow Q\subset R$ ∴ $q\rightarrow r$ 가 참이다.

35. 한쪽 면에는 숫자, 다른 쪽 면에는 영문자가 쓰여진 카드가 다음 규칙을 만족한다. '카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 자음이 적혀 있다.' 탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 반드시확인해야할 필요가 있는 것은?

$\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{k}\ \boxed{u}$

① $\boxed{7}\ \boxed{u}$

② $\boxed{7}\ \boxed{k}$

③ $\boxed{2}\ \boxed{u}$

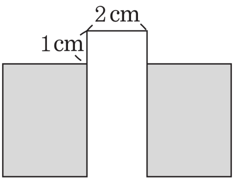
④ $\boxed{2}\ \boxed{k}$

⑤ $\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{k}\ \boxed{u}$

해설

주어진 규칙의 대우는 '한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀있다.' 이다. 따라서 홀수가 적혀있는 카드와 모음이 적혀 있는 카드만 확인하면 된다.

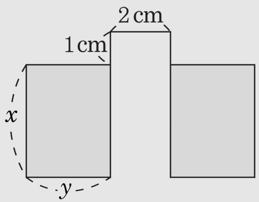
36. 폭이 200cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



① $1000\,\text{cm}^2$ ② $1200\,\text{cm}^2$ ③ $1600\,\text{cm}^2$

④ $2000\,\text{cm}^2$ ⑤ $2400\,\text{cm}^2$

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 y cm, 세로를 x cm 라고 하면

$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200$ 에서

$4x + 2y = 196 x > 0,\ y > 0$ 이므로

(산술평균) $\geq$(기하평균) 에서

$$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$$

$$\therefore\ xy \leq \frac{49^2}{2},\ 2xy \leq 49^2,\ 2xy \leq 2401$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

37. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow \ f(g(x)) = x$

$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore \ f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

38. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_4 : a_7$는? (단, $a_1 \neq 0$이다.)

① $1 : 2$ ② $1 : 3$ ③ $2 : 3$ ④ $2 : 5$ ⑤ $3 : 5$

해설

$a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2)$

$a + 2d + a + 3d = 2(a + a + d)$

$2a + 5d = 4a + 2d$

$3d = 2a$

$$\begin{aligned} \therefore\ a_4 : a_7 &= (a + 3d) : (a + 6d) \\ &= (a + 2a) : (a + 4a) = 3a : 5a \\ &= 3 : 5 \end{aligned}$$

39. 다음 두 집합 $A = \{x \mid x$는 24의 약수$\}$, $B = \{1,\ 3,\ 8,\ a \times 3,\ 2,\ b + 3,\ c,\ 12\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, 자연수 a 가 될 수 있는 최댓값과 최솟값의 차이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$,
$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 12,\ a \times 3,\ b + 3,\ c\}$ 이므로,
$a \times 3,\ b + 3,\ c$ 는 각각 4, 6, 24 중 하나여야 한다.
$a \times 3 = 4$ 일 때 a 값이 최소가 되고, $a \times 3 = 24$ 일 때 a 값이 최대가 되지만, $a \times 3 = 4$ 일 때의 a 값은 자연수가 아니므로 부적합하다.
따라서 a 값이 최소일 때는 $a \times 3 = 6$ 일 때이다.
최댓값 : $a = 8$
최솟값 : $a = 2$
따라서 $8 - 2 = 6$

40. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

(i) A형인 사람은 B형이 아니다.
(ii) C형이 아닌 사람은 B형이 아니다.
(iii) C형인 사람은 D형이 아니다.
(iv) E형인 사람은 B형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 <u>않는</u> 것을 보기에서 <u>모두</u> 고르면?

보기

㉠ A형인 사람은 E형이 아니다.

㉡ E형인 사람은 C형이 아니다.

㉢ E형이면서도 D형인 사람이 있다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

조건 A, B, C, D, E가 각각 상태가 A, B, C, D, E인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv) 를 명제로 표현하면
$A \Rightarrow \sim B$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $C \Rightarrow \sim D$, $E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면
(i) 의 대우 : B형이면 A형이 아니다.
즉, $B \Rightarrow \sim A$
(ii) 의 대우 : B형이면 C형이다.
즉, $B \Rightarrow C$
(iii) 의 대우 : D형이면 C형이 아니다.
즉, $D \Rightarrow \sim C$
(iv) 의 대우 : B형이 아니면 E형이 아니다.
즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$
$E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,
즉, $A \Rightarrow \sim E$
$\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \Rightarrow \sim E$,
즉, $E \Rightarrow C$
$D \Rightarrow \sim C$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $D \Rightarrow \sim E$
따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

41. 다음 명제 ㉠, ㉡, ㉢가 각각 부등식 $(a-1)(b-1)(c-1)>0$이기 위한 무슨 조건인지 순서대로 적으면? (단, a, b, c는 실수)

㉠ a, b, c 중 적어도 하나는 1보다 크다.
㉡ a, b, c의 최댓값이 1보다 크다.
㉢ a, b, c의 최솟값이 1보다 크다.

① 필요, 충분, 필요충분
② 충분, 필요충분, 충분
③ 필요, 필요충분, 충분
④ 충분, 필요, 필요충분
⑤ 필요, 필요, 충분

해설

㉠ $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이면, $a-1$, $b-1$, $c-1$ 중 하나 또는 셋이 양수이 므로 필요조건 역으로 $a=2$, $b=2$, $c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ 이므로 충분조건은 아 니다.
∴ 필요조건

㉡ $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이면 a, b, c 중 하나 또는 셋이 1 보다 크므로 최댓값은 1 보다 크다. 역으로 $a=2$, $b=2$, $c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ 이므로 충분조건은 아니다.
∴ 필요조건

㉢ a, b, c 의 최솟값이 1 보다 크면 $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이므로 충분조건 역으로 $a=2$, $b=0$, $c=0$ 이면 최솟값은 0 이 므로 필요조건은 아니다.
∴ 충분조건

42. 실수 전체의 집합을 R, 유리수 전체의 집합을 Q 라 할 때, R 에서 R 로의 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)\begin{cases}\sqrt{2} & (\ x \in Q\text{일 때}) \\ 1 & (\ x \notin Q\text{일 때})\end{cases}$$

함수 f 에 대한 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $x \in Q$ 일 때, $(f \circ f)(x) = 1$

㉡ $x \in R$ 일 때, $f(x + f(x)) = 1$

㉢ $x_1, x_2 \in R$ 이고, $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이면 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = 1$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \in Q$ 이면 $f(x) = \sqrt{2} \notin Q$
$\therefore\ (f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1$
㉡ i) $x \in Q$ 이면 $x + f(x) = x + \sqrt{2} \notin Q$
$\therefore\ f(x + f(x)) = 1$
ii) $x \notin Q$ 이면 $x + f(x) = x + 1 \notin Q$
$\therefore\ f(x + f(x)) = 1$
따라서, $x \in R$ 이면 $f(x + f(x)) = 1$
㉢ $f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이므로 $x_1 \notin Q$, $x_2 \notin Q$
그런데 $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ 인 경우에는
$f(x_1) = f(x_2) = 1$ 이지만
$f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(1) = \sqrt{2}$
따라서 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 가 반드시 1이라고 할 수는 없다.