1. 다음 집합을 원소나열법으로 나타낸 것은?
$\{x|x$는 10이하의 홀수$\}$

① $\{1, 3\}$
② $\{1, 3, 5\}$
③ $\{1, 3, 5, 7\}$
④ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

해설
$\{x|x$는 10이하의 홀수$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ $\{0\} = \varnothing$	㉡ $\varnothing \not\subset \{\varnothing\}$
㉢ $\{a, b\} \subset \{b, a\}$	㉣ $\{1\} \subset \{2, 3, 4\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $\{0\}$ 은 원소 0을 포함하는 집합이다.
㉡ ϕ은 모든 집합의 부분집합이다.
㉢ 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.
㉣ 집합 $\{2, 3, 4\}$는 집합 $\{1\}$ 을 포함하지 않는다.

3. 두 집합 $A = \{x-2 \mid -4 < x \leq 3\}$, $B = \{x+a \mid -1 \leq x < 7\}$에 대하여 $A \subset B$가 되게 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \leq a < -3$　② $-4 < a \leq -3$　③ $-6 \leq a < -5$

④ $-6 < a \leq -5$　⑤ $-7 \leq a \leq -5$

해설

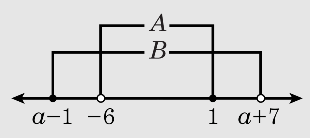
$-4 < x \leq 3$ 에서 $-6 < x-2 \leq 1$

$\therefore A = \{x \mid -6 < x \leq 1\}$

$-1 \leq x < 7$에서 $a-1 \leq x+a \leq 7+a$

$\therefore\ B = \{x \mid a-1 \leq x \leq 7+a\}$

이때, $A \subset B$를 만족하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a-1 \leq -6$, $7+a > 1$

$\therefore\ -6 < a \leq -5$

4. 다음 <보기> 중에서 자연수 전체의 집합 N에서 N으로의 함수가 되는 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$을 대응시킨다.

ㄴ 자연수 n에 n의 양의 약수의 개수를 대응시킨다.

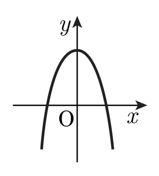
ㄷ 홀수에는 1, 짝수에는 2, 소수에는 3을 대응시킨다.

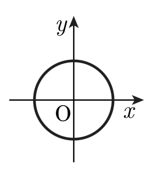
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

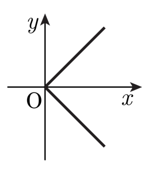
해설

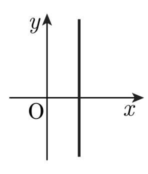
자연수에서 자연수로의 함수라는 말의 의미는
정의역이 자연수 일 때, 치역도 자연수인 함수를
찾으라는 말이다. 그런데 이때 ㄱ은 무리수가
치역에 포함되지 않으므로 정의에 타당하지 않다.
ㄷ에서 2는 짝수이며 소수이므로 옳지 않다.
따라서 ㄴ만 옳다.

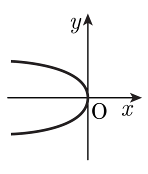
5. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

6. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$(x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$
$\therefore\ f(2) = 2$
모든 실수 x 에 대하여
$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.
$\therefore\ g(4) = -3$
$\therefore\ f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

7. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a, 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
$\therefore\ 4^3=64$
$\therefore\ a+b=64$

8. 두 함수 $f(x)=3x+1$, $g(x)=4x+a$에 대하여 $(g\circ f)(x)=12x+7$이 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(x)=3x+1,\ g(x)=4x+a$ 이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)$

$=4(3x+1)+a$

$=12x+4+a$

따라서 $12x+4+a=12x+7$ 에서 $4+a=7$

$\therefore\ a=3$

9. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $n(X) = n(Y)$이다.

② $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

③ $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ (f 의 정의역) = (f^{-1} 의 치역)
(f^{-1} 의 정의역) = (f 의 치역)

10. $f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$, $g(x) = x + c$라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$가 성립한다. 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 7$

▷ 정답: $c = -5$

해설

$(f \circ g)(x) = f(x+c) = a(x+c) + b = ax + ac + b$

$\therefore\ a = 2 \cdots$ ㉠

$ac + b = -3 \cdots$ ㉡

$f^{-1}(3) = -2$이므로, $f(-2) = 3$

$\therefore\ -2a + b = 3 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

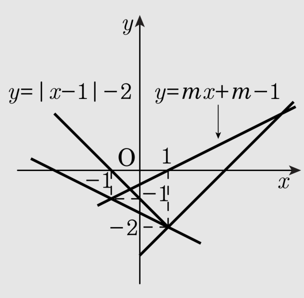
$\therefore a = 2,\ b = 7,\ c = -5$

11. 함수 $y = |x-1| - 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < m < 0$ ② $-\frac{1}{2} < m < 1$ ③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$
④ $0 < m < 1$ ⑤ $1 < m < 2$

해설

$y = |x-1| - 2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$ 에서 꺽인 그래프이다.



또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x+1) - 1$ 에서 m 의 값에 관계 없이 점 $(-1,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.
따라서, 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$

12. 분수식 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\dfrac{1}{x}$

해설

(준 식) $=1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}=1+\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}$

13. $x : y = 4 : 3$일 때, $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$의 값은?

① $\dfrac{7}{25}$ ② $\dfrac{9}{25}$ ③ $\dfrac{11}{25}$ ④ $\dfrac{13}{25}$ ⑤ $\dfrac{16}{25}$

해설

$x : y = 4 : 3$에서 $x = 4k,\ y = 3k(k \neq 0)$라고 하면

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{16k^2 - 9k^2}{16k^2 + 9k^2} = \dfrac{7}{25}$

14. 유리함수 $y=\dfrac{ax-b}{x-2}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{3x-1}{x+c}$ 의 그래프와 일치한다. 이때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 8

해설

$y=\dfrac{ax-b}{x-2} \Rightarrow y-2=\dfrac{a(x+3)-6}{(x+3)-2}$

$\Rightarrow y=\dfrac{ax+3a-b+2(x+1)}{x+1}$

$=\dfrac{(a+2)x+3a-b+2}{x+1}$

$\therefore c=1,\ a=1,\ b=6$

$\Rightarrow a+b+c=8$

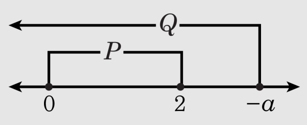
15. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x + a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x | x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

16. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.

② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.

③ 4 의 배수는 2 의 배수이다.

④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.

⑤ $x+y \le 5$ 이면 $x \le 2, y \le 3$ 이다.

해설

'역'의 대우인 '이'가 참인지 확인 한다.
① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례 : $x=2$
② x 가 3 의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례 : $x=5$
③ 4 의 배수가 아니면 2 의 배수가 아니다 (거짓) 반례 : 6
④ $2x \le x+3 \rightarrow x \le 3$ (참)
⑤ $x+y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \ge 3$ (참)

17. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 명제 $p \Rightarrow \sim q$, $q \Rightarrow r$, $s \Rightarrow q$일 때, 보기 중 참인 명제의 개수는?

㉠ $q \Rightarrow p$	㉡ $s \Rightarrow r$	㉢ $r \Rightarrow s$
㉣ $p \Rightarrow \sim s$	㉤ $q \Rightarrow \sim p$	㉥ $\sim r \Rightarrow \sim q$
㉦ $s \Rightarrow \sim p$		

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

㉡, ㉣, ㉤, ㉥, ㉦이 참이다.
$p \Rightarrow \sim q$, $q \Rightarrow r$, $s \Rightarrow q$이므로
그 각각의 대우도 참이다.
$\therefore q \Rightarrow \sim p$, $\sim r \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim s$
$p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim s$ 이므로
$\therefore p \Rightarrow \sim s$, $s \Rightarrow \sim p$
$s \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로
$\therefore s \Rightarrow r$

18. $a,\ b,\ c$가 실수일 때, p는 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = b = 0$

② $p : a,\ b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b,\ q : ac = bc$

④ $p : a - 1 = 0,\ q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0,\ q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

p는 q이기 위한 필요충분조건이려면 $p \to q,\ q \to p$가 모두 참이어야 한다.

① $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p$
② $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 1,\ b = 3$)
③ $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$)
④ $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ (반례 : $a = -1$)
⑤ $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ (반례 : $a = 0,\ b = 0$)

19. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: ____________ 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p 는 s 이기 위한 필요조건이다.

20. 다음 부등식 중 성립하지 <u>않는</u> 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a|+|b| \geq |a+b|$

② $a \geq b > 0$일 때 $\dfrac{b}{2+a} \geq \dfrac{a}{2+b}$

③ $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc(a>0, b>0, c>0)$

④ $\sqrt{3}+\sqrt{13} > \sqrt{2}+\sqrt{14}$

⑤ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

해설

$$\frac{b}{2+a}-\frac{a}{2+b}=\frac{2b+b^2-2a-a^2}{(2+a)(2+b)}$$

$$=\frac{b^2-a^2+2(b-a)}{(2+a)(2+b)}$$

$$=\frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)}$$ 에서

$(a+2)(b+2)>0$이고

$(b-a) \leq 0$, $a+b+2>0$이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a}-\frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

21. 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2+2axy+by^2 \geq 0$이 성립하기 위한 실수 $a,\ b$의 조건은?

① $a \leq b^2$　　② $b^2 \leq a$　　③ $a^2 \leq b$
④ $b \leq a^2$　　⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2+2axy+by^2 \geq 0$에서 양변을 y^2으로 나누면

$\left(\frac{x}{y}\right)^2+2a\left(\frac{x}{y}\right)+b \geq 0$

모든 실수 x, y에 대해 성립하려면

$\frac{D}{4}=a^2-b \leq 0$

$\therefore a^2 \leq b$

22. $x > 0,\ y > 0$일 때, $\left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + 12y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 27

해설

$x > 0,\ y > 0$이므로

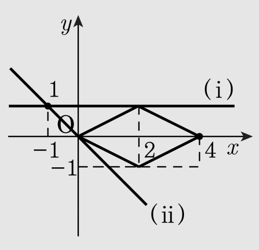
$\left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + 12y\right) = 3 + 36xy + \frac{1}{xy} + 12$

$= 15 + 36xy + \frac{1}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{36\frac{1}{xy} \cdot xy} + 15 = 27$

23. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m \leq 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

24. 모든 실수 x에 대하여 다음 분수식 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$가 항상 성립하도록 상수 a, b, c의 값을 정할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 식의 우변을 통분하면

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$=\frac{a(x+2)^2+b(x+1)(x+2)+c(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$\therefore\ 1=a(x+2)^2+b(x+1)(x+2)+c(x+1)$

이것이 x에 대한 항등식이어야 하므로

양변에 $x=-1$을 대입하면 $1=a$

$x=-2$를 대입하면 $1=-c$

즉, $c=-1$

$x=0$을 대입하면 $1=4a+2b+c$

$a=1$, $c=-1$이므로 $1=4+2b-1$

$\therefore\ b=-1$

$\therefore\ a+b+c=1-1-1=-1$

25. x km인 길을 왕복하는데 갈 때는 a km/h, 올 때는 b km/h의 속력으로 걸었다. 이때, 평균속력은?

① $\dfrac{x}{a+b}$ ② $\dfrac{a+b}{x}$ ③ $x(a+b)$

④ $\dfrac{2ab}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{2(a+b)}{ab}$

해설

$$\frac{2x}{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}} = \frac{2x}{\frac{(a+b)x}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

26. 두 함수 $y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$, $y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때, $a+b$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{5}{3}$　③ 2　④ 3　⑤ $\dfrac{7}{2}$

해설

$y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{5}{3}$ 이고,

$y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$ 이다.

이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$\dfrac{2}{3}=-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{5}{3}=\dfrac{a}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{10}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=2$

27. 다음 $\square$ 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

㉠ $n\left(\left\{x \mid x\text{는 } \square \text{미만의 자연수}\right\}\right) = 4$

㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d\}) - n(\{b,\ c,\ d\}) = \square$

㉢ $A \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 의 개수는 $\square$ 개이다.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

㉠ $n(\{x \mid x\text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}) = 4$
㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d\}) - n(\{b,\ c,\ d\}) = 1$
㉢ $A \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$ 의 3 개
$\therefore 5 + 1 + 3 = 9$

28. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 에 대하여 $x \subset A,\ x \neq A$ 인 집합의 개수는?

① 3 개　② 4 개　③ 5 개　④ 6 개　⑤ 7 개

해설

$A = \{3, 6, 9\}$ 이고, x는 A의 진부분집합이다. 따라서 x의 개수는 $2^3 - 1 = 7$(개) 이다.

29. 집합 $A = \{x \mid x$는 a 이하인 5의 배수$\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 32 개가 되기 위한 자연수 a 의 값은?

① 20　　② 25　　③ 30　　④ 35　　⑤ 40

해설

$32 = 2^5$ 이므로 집합 A 의 원소의 개수는 5 개이어야 한다.
$A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\}$ 이므로 $a = 25$ 이다.

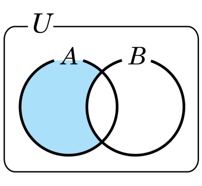
30. 세 집합 $A,\ B,\ C$가 $A \cup B = C$, $B \cap C = C$ 를 만족할 때, 다음 중 두 집합 $A,\ B$ 사이의 관계로 옳은 것은?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cup B = \varnothing$　③ $A^c \cup B^c = \varnothing$
④ $B - A = \varnothing$　⑤ $A - B = \varnothing$

해설

$A \cup B = C$ 에서 $A \subset C,\ B \subset C \cdots$ ㉠
$B \cap C = C$ 에서 $C \subset B \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $B = C$
따라서 $A \subset C,\ B = C$ 이므로 $A \subset B$
$\therefore\ A - B = \varnothing$

31. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 그림과 같이 벤 다이어그램을 그린 후 원소를 써 넣어 보았더니 색칠한 부분에는 원소가 하나도 없었다. 다음 중 항상 옳은 것은?

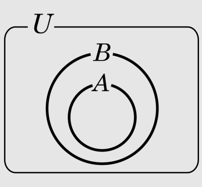


① $B \subset A$　　② $n(A) < n(B)$　　③ $A \cup B = B$

④ $B - A = \varnothing$　　⑤ $A^c \subset B^c$

해설

주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 공집합이므로 집합 A 는 집합 B 에 포함된다.　따라서 $A \cup B = B$ 가 항상 성립한다.



32. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를 $A \triangle B = (A \cap B^c)^c$로 정의할 때, 다음 중 $(A \triangle B) \triangle B$와 같은 것은?

① $A \cup B$　② $A \cap B$　③ $A - B$　④ A　⑤ B

해설

$A \triangle B = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$

$$\begin{aligned} \therefore (A \triangle B) \triangle B &= (A^c \cup B)^c \cup B = (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = A \cup B \end{aligned}$$

33. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 'n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{(가)}}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{\text{(나)}}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
> 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{(다)}}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{\text{(라)}}$ 그러므로 대우가 $\boxed{\text{(마)}}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{(마)}}$ 이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3 의 배수가 아니다.
② (나) 1
③ (다) 자연수
④ (라) 3 의 배수이다.
⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{3의 배수가 아니다}}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{자연수}}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{\text{3의 배수가 아니다.}}$
그러므로 대우가 $\boxed{\text{참}}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$ 이다.

34. 두 조건 $p : x \le 3 - a$ 또는 $x \ge a$, $q : |x| \le 7$에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \ge 3$)

① $a > 10$　　② $a > 7$　　③ $a > 3$

④ $a > -1$　　⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
$p \to \sim q$ 의 대우명제 $q \to \sim p$ 가 참이다.
p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
$Q \subset P^c$ 이므로
$P^c = \{x \mid 3 - a < x < a\}$,
$Q = \{x \mid -7 \le x \le 7\}$ 이므로
$3 - a < -7$, $a > 7$
따라서 $a > 10$,$a > 7$ 이므로 $a > 10$

35. 임의의 정수 k에 대하여 $f(k) = 2k - 1$이라 하고, 연산 $\diamond$를 $f(m)\diamond f(n) = f(2m+n)$로 정의한다. 이 때, $-3\diamond 5$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$f(m) = -3,\ f(n) = 5$라 하면

$2m - 1 = -3,\ 2n - 1 = 5$

$\therefore\ m = -1,\ m = 3$

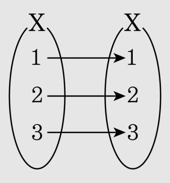
$\therefore -3\diamond 5 = f(-1)\diamond f(3) = f(-2+3) = f(1) = 1$

36. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$
즉 $f = I$ (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



37. 집합 $S=\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}\right\}$ 의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{31}$ 이라 하자. 각 집합 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,A_{31}$ 에서 최소인 원소를 각각 뽑아 이들을 모두 더한 값을 구하면 $\frac{p}{q}$ $(p, q$는 서로소$)$이다. 이 때, $p-q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 130

해설

㉠ $\frac{1}{3^4}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^4}$ 을 포함하는 S 의 부분집합의 수와 같다.
$\therefore\ 2^4$ 개
㉡ $\frac{1}{3^3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
$\therefore\ 2^3$ 개
㉢ $\frac{1}{3^2}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^2}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^3}$, $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
$\therefore\ 2^2$ 개
㉣ $\frac{1}{3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{3^3}$, $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
$\therefore\ 2$ 개
㉤ 1 이 가장 작은 원소가 되는 경우는 1가지이다.
그러므로 구하는 값은 $\frac{1}{3^4}\times 2^4+\frac{1}{3^3}\times 2^3+\frac{1}{3^2}\times 2^2+\frac{1}{3}\times 2+1=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^1+1=\frac{16+24+36+54+81}{81}=\frac{211}{81}$
$\therefore\ p=211, q=81$ 이므로 $p-q=130$

38. 전체집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 두 부분집합이 $A,\ B$ 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 (A,B) 의 개수를 구하여라.

(1) $A\cap B=\varnothing$ (2) $A\cup B=U$

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 16 개

해설

$A\cap B=\varnothing$ 이고 $A\cup B=U$ 이면 $n(A)+n(B)=n(U)=4$

$n(A)=0,\ n(B)=4$ 인 경우 : 1 개

$n(A)=1,\ n(B)=3$ 인 경우 : 4 개

$n(A)=2,\ n(B)=2$ 인 경우 : 6 개

$n(A)=3,\ n(B)=1$ 인 경우 : 4 개

$n(A)=4,\ n(B)=0$ 인 경우 : 1 개

따라서 순서쌍 (A,B) 의 개수는 $1+4+6+4+1=16$ (개)

39. 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 3 개, 8 개, 10 개이다. $(A-C)\cup(B\cap C^c)=\varnothing$ 를 만족하는 세 집합 A , B , C 에 대하여 $n(C-A)+n(C-B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(A-C)\cup(B\cap C^c)=\varnothing$ 는

$A-C=\varnothing,\ B-C=\varnothing \rightarrow A\subset C,\ B\subset C$

$\therefore n(C-A)+n(C-B)=(10-3)-(10-8)=5$

40. 1 부터 어떤 수까지의 자연수 중 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 $P_{(k)}$ 라고 정의한다. $n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때, $n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)}))$ 를 a, b, c 로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b - c$

해설

$n(P_{(3)}) = a$ $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때

$$\begin{aligned} & n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)})) \\ &= n(P_3 \cup P_4) \\ &= n(P_{3)} + n(P_4) - n(P_{12}) \\ &= a + b - c \end{aligned}$$

41. $a,\ b,\ c$는 서로 다른 수이고 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{a}{c}=k$를 만족한다. 이때, k^2+k의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$b=ak,\ c=bk,\ a=ck$이므로 변끼리 곱하면 $abc=abck^3$

$\therefore k^3=1(\because abc\neq 0)$

$\therefore (k-1)(k^2+k+1)=0$에서

$k^2+k+1=0$ ($\because k=1$이면 $a=c$가 되어 모순)

$\therefore k^2+k=-1$