

1. 다음 집합을 원소나열법으로 나타낸 것은?
 $\{x|x\text{는 } 10\text{이하의 홀수}\}$

① $\{1, 3\}$

② $\{1, 3, 5\}$

③ $\{1, 3, 5, 7\}$

④ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

해설

$$\{x|x\text{는 } 10\text{이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

2. 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ $\{0\} = \emptyset$

㉡ $\emptyset \notin \{\emptyset\}$

㉢ $\{a, b\} \subset \{b, a\}$

㉣ $\{1\} \subset \{2, 3, 4\}$

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

해설

㉠ $\{0\}$ 은 원소 0을 포함하는 집합이다.

㉡ $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이다.

㉢ 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.

㉣ 집합 $\{2, 3, 4\}$ 는 집합 $\{1\}$ 을 포함하지 않는다.

3. 두 집합 $A = \{x - 2 \mid -4 < x \leq 3\}$, $B = \{x + a \mid -1 \leq x < 7\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 가 되게 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-4 \leq a < -3$

② $-4 < a \leq -3$

③ $-6 \leq a < -5$

④ $-6 < a \leq -5$

⑤ $-7 \leq a \leq -5$

해설

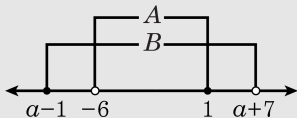
$$-4 < x \leq 3 \text{ 에서 } -6 < x - 2 \leq 1$$

$$\therefore A = \{x \mid -6 < x \leq 1\}$$

$$-1 \leq x < 7 \text{ 에서 } a - 1 \leq x + a \leq 7 + a$$

$$\therefore B = \{x \mid a - 1 \leq x \leq 7 + a\}$$

이때, $A \subset B$ 를 만족하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\text{즉, } a - 1 \leq -6, 7 + a > 1$$

$$\therefore -6 < a \leq -5$$

4. 다음 <보기> 중에서 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수가 되는 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 을 대응시킨다.
- ㉡ 자연수 n 에 n 의 양의 약수의 개수를 대응시킨다.
- ㉢ 홀수에는 1, 짝수에는 2, 소수에는 3을 대응시킨다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

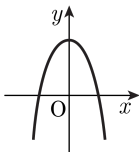
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

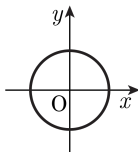
자연수에서 자연수로의 함수라는 말의 의미는 정의역이 자연수 일 때, 치역도 자연수인 함수를 찾으라는 말이다. 그런데 이때 ㉠은 무리수가 치역에 포함되지 않으므로 정의에 타당하지 않다. ㉢에서 2는 짝수이며 소수이므로 옳지 않다. 따라서 ㉡만 옳다.

5. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

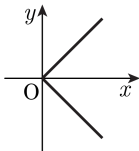
①



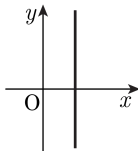
②



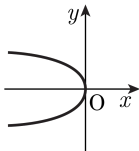
③



④



⑤



해설

함수는 하나의 x 값에 여러 개의 y 값이 대응될 수 없다.

6. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$ (x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$$\therefore f(2) = 2$$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$$\therefore g(4) = -3$$

$$\therefore f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1 \text{ 이다.}$$

7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.

$$\therefore 4^3 = 64$$

$$\therefore a + b = 64$$

8. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$$

$$= 4(3x + 1) + a$$

$$= 12x + 4 + a$$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

$$\therefore a = 3$$

9. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $n(X) = n(Y)$ 이다.

② $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

③ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ $(f \text{ 의 정의역}) = (f^{-1} \text{ 의 치역})$

$(f^{-1} \text{ 의 정의역}) = (f \text{ 의 치역})$

10. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 7$

▷ 정답 : $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

11. 함수 $y = |x - 1| - 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < m < 0$

② $-\frac{1}{2} < m < 1$

③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$

④ $0 < m < 1$

⑤ $1 < m < 2$

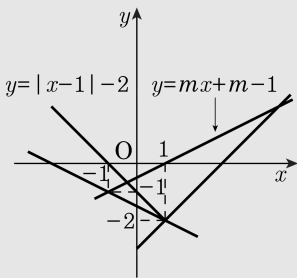
해설

$y = |x - 1| - 2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1, -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x + 1) - 1$ 에서 m 의 값에 관계 없이 점 $(-1, -1)$ 을 지나는 직선이다.

따라서, 두 그래프가 서로 다른 두

점에서 만나기 위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$



12. 분수식 $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{x}$

해설

$$(\text{준 식}) = 1 - \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

13. $x : y = 4 : 3$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 의 값은?

① $\frac{7}{25}$

② $\frac{9}{25}$

③ $\frac{11}{25}$

④ $\frac{13}{25}$

⑤ $\frac{16}{25}$

해설

$x : y = 4 : 3$ 에서 $x = 4k$, $y = 3k(k \neq 0)$ 라고 하면

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{16k^2 - 9k^2}{16k^2 + 9k^2} = \frac{7}{25}$$

14. 유리함수 $y = \frac{ax-b}{x-2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $y = \frac{3x-1}{x+c}$ 의 그래프와 일치한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 3

④ 5

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax-b}{x-2} \Rightarrow y-2 = \frac{a(x+3)-6}{(x+3)-2} \\ \Rightarrow y &= \frac{ax+3a-b+2(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{(a+2)x+3a-b+2}{x+1} \\ \therefore c &= 1, a=1, b=6 \\ \Rightarrow a+b+c &= 8 \end{aligned}$$

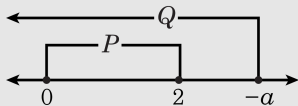
15. 실수 x 에 대한 두 조건 $p : 0 \leq x \leq 2$, $q : x + a \leq 0$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

p , q 를 만족하는 집합을 각각 P , Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x | x \leq -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$ 하려면 $2 \leq -a$, $a \leq -2$ 따라서 a 의 최댓값은 -2

16. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

- ① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.
- ② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.
- ③ 4의 배수는 2의 배수이다.
- ④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.
- ⑤ $x+y \leq 5$ 이면 $x \leq 2, y \leq 3$ 이다.

해설

‘역’의 대우인 ‘이’가 참인지 확인 한다.

- ① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례: $x = 2$
- ② x 가 3의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례: $x = 5$
- ③ 4의 배수가 아니면 2의 배수가 아니다 (거짓) 반례: 6
- ④ $2x \leq x+3 \rightarrow x \leq 3$ (참)
- ⑤ $x+y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \geq 3$ (참)

17. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 명제 $p \Rightarrow \sim q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow q$ 일 때, 보기 중 참인 명제의 개수는?

$$\textcircled{\text{㉠}} q \Rightarrow p$$

$$\textcircled{\text{㉡}} s \Rightarrow r$$

$$\textcircled{\text{㉢}} r \Rightarrow s$$

$$\textcircled{\text{㉤}} p \Rightarrow \sim s$$

$$\textcircled{\text{㉥}} q \Rightarrow \sim p$$

$$\textcircled{\text{㉦}} \sim r \Rightarrow \sim q$$

$$\textcircled{\text{㉧}} s \Rightarrow \sim p$$

① 3개

② 4개

③ 5개

④ 6개

⑤ 7개

해설

$\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉤}}, \textcircled{\text{㉥}}, \textcircled{\text{㉦}}, \textcircled{\text{㉧}}$ 이 참이다.

$p \Rightarrow \sim q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow q$ 이므로

그 각각의 대우도 참이다.

$$\therefore q \Rightarrow \sim p, \sim r \Rightarrow \sim q, \sim q \Rightarrow \sim s$$

$$p \Rightarrow \sim q, \sim q \Rightarrow \sim s \text{ 이므로}$$

$$\therefore p \Rightarrow \sim s, s \Rightarrow \sim p$$

$$s \Rightarrow q, q \Rightarrow r \text{ 이므로}$$

$$\therefore s \Rightarrow r$$

18. a, b, c 가 실수일 때, p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0, q : a = b = 0$

② $p : a, b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b, q : ac = bc$

④ $p : a - 1 = 0, q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0, q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

p 는 q 이기 위한 필요충분조건이라면 $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ 가 모두 참이어야 한다.

① $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$

② $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ (반례 : $a = 1, b = 3$)

③ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ (반례 : $a = 1, b = 2, c = 0$)

④ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ (반례 : $a = -1$)

⑤ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ (반례 : $a = 0, b = 0$)

19. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.



답 :

조건



정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$

q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$

r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$

$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$

그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

20. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a| + |b| \geq |a + b|$

② $a \geq b > 0$ 일 때 $\frac{b}{2+a} \geq \frac{a}{2+b}$

③ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc (a > 0, b > 0, c > 0)$

④ $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\begin{aligned}\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} &= \frac{2b + b^2 - 2a - a^2}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{b^2 - a^2 + 2(b-a)}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \text{에서}\end{aligned}$$

$$(a+2)(b+2) > 0 \text{이고}$$

$$(b-a) \leq 0, a+b+2 > 0 \text{이므로}$$

$$(\because a \geq b > 0)$$

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

21. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 에서 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수 x, y 에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

22. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + 12y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\left(3x + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + 12y\right) &= 3 + 36xy + \frac{1}{xy} + 12 \\ &= 15 + 36xy + \frac{1}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{36 \frac{1}{xy} \cdot xy} + 15 = 27\end{aligned}$$

23. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는

$x+2y=2$ 의 그래프에서

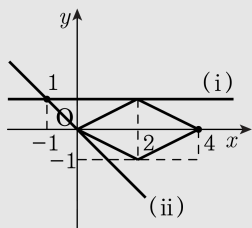
$x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한

것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼

평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는

다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이

점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

24. 모든 실수 x 에 대하여 다음 분수식 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ 가 항상 성립하도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 식의 우변을 통분하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} \\ &= \frac{a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 = a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)$$

이것이 x 에 대한 항등식이어야 하므로

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $1 = a$

$x = -2$ 를 대입하면 $1 = -c$

즉, $c = -1$

$x = 0$ 을 대입하면 $1 = 4a + 2b + c$

$a = 1, c = -1$ 이므로 $1 = 4 + 2b - 1$

$$\therefore b = -1$$

$$\therefore a + b + c = 1 - 1 - 1 = -1$$

25. x km 인 길을 왕복하는데 갈 때는 a km/h, 올 때는 b km/h 의 속력으로 걸었다. 이때, 평균속력은?

① $\frac{x}{a+b}$

② $\frac{a+b}{x}$

③ $x(a+b)$

④ $\frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{2(a+b)}{ab}$

해설

$$\frac{2x}{\frac{x}{a} + \frac{x}{b}} = \frac{2x}{\frac{(a+b)x}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

26. 두 함수 $y = \frac{5x+1}{3x-2}$, $y = \frac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때,
 $a+b$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{5}{3}$

③ 2

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$y = \frac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{5}{3} \text{ 이고,}$$

$y = \frac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{b}{2}, y = \frac{a}{2} \text{ 이다.}$$

이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$$\frac{2}{3} = -\frac{b}{2}, \frac{5}{3} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore a = \frac{10}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore a+b=2$$

27. 다음 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

$$\textcircled{㉠} n(\{x|x \text{는 } \square \text{미만의 자연수}\}) = 4$$

$$\textcircled{㉡} n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = \square$$

$$\textcircled{㉢} A \subset \{1, 2, 3\} \text{ 이고, } n(A) = 2 \text{ 를 만족하는 집합 } A \text{ 의 개수는 } \square \text{ 개이다.}$$

▶ 답 :

▶ 정답 : 9

해설

$$\textcircled{㉠} n(\{x|x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}) = 4$$

$$\textcircled{㉡} n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = 1$$

$$\textcircled{㉢} A \subset \{1, 2, 3\} \text{ 이고, } n(A) = 2 \text{ 를 만족하는 집합 } A \text{ 는 } \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \text{ 의 } 3 \text{ 개}$$

$$\therefore 4 + 1 + 3 = 8$$

28. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $x \subset A$, $x \neq A$ 인 집합의 개수는?

① 3 개

② 4 개

③ 5 개

④ 6 개

⑤ 7 개

해설

$A = \{3, 6, 9\}$ 이고, x 는 A 의 진부분집합이다. 따라서 x 의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$ 이다.

29. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } a \text{ 이하인 } 5 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 32 개가 되기 위한 자연수 a 의 값은?

① 20

② 25

③ 30

④ 35

⑤ 40

해설

$32 = 2^5$ 이므로 집합 A 의 원소의 개수는 5 개이어야 한다.
 $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ 이므로 $a = 25$ 이다.

30. 세 집합 A, B, C 가 $A \cup B = C$, $B \cap C = C$ 를 만족할 때, 다음 중 두 집합 A, B 사이의 관계로 옳은 것은?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cup B = \emptyset$

③ $A^c \cup B^c = \emptyset$

④ $B - A = \emptyset$

⑤ $A - B = \emptyset$

해설

$A \cup B = C$ 에서 $A \subset C$, $B \subset C \dots \textcircled{\text{㉠}}$

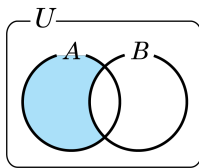
$B \cap C = C$ 에서 $C \subset B \dots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $B = C$

따라서 $A \subset C$, $B = C$ 이므로 $A \subset B$

$\therefore A - B = \emptyset$

31. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 그림과 같이 벤 다이어그램을 그린 후 원소를 써 넣어 보았더니 색칠한 부분에는 원소가 하나도 없었다. 다음 중 항상 옳은 것은?



① $B \subset A$

② $n(A) < n(B)$

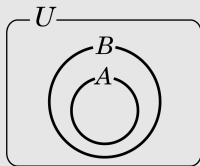
③ $A \cup B = B$

④ $B - A = \emptyset$

⑤ $A^c \subset B^c$

해설

주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 공집합이므로 집합 A 는 집합 B 에 포함된다. 따라서 $A \cup B = B$ 가 항상 성립한다.



32. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 Δ 를 $A\Delta B = (A \cap B^c)^c$ 로 정의할 때, 다음 중 $(A\Delta B)\Delta B$ 와 같은 것은?

- ① $A \cup B$ ② $A \cap B$ ③ $A - B$ ④ A ⑤ B

해설

$$A\Delta B = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

$$\begin{aligned}\therefore (A\Delta B)\Delta B &= (A^c \cup B)^c \cup B = (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = A \cup B\end{aligned}$$

33. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 ‘ n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’를 증명한 것이다.

주어진 명제의 대우를 구하면 ‘ n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 (가)’이다. n 이 3의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm$ (나) (m 은 자연수)에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$ 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 (다)이므로 n^2 은 (라) 그러므로 대우가 (마)이므로 주어진 명제도 (마)이다.

위

의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

- ① (가) 3의 배수가 아니다. ② (나) 1
 ③ (다) 자연수 ④ (라) 3의 배수이다.
 ⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 ‘ n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다’이다. n 이 3의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm$ 1 (m 은 자연수)에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$ 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 자연수이므로 n^2 은 3의 배수가 아니다. 그러므로 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

34. 두 조건 $p : x \leq 3 - a$ 또는 $x \geq a$, $q : |x| \leq 7$ 에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \geq 3$)

① $a > 10$

② $a > 7$

③ $a > 3$

④ $a > -1$

⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.
 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $Q \subset P^c$ 이므로
 $P^c = \{x \mid 3 - a < x < a\}$,
 $Q = \{x \mid -7 \leq x \leq 7\}$ 이므로
 $3 - a < -7, a > 7$
따라서 $a > 10, a > 7$ 이므로 $a > 10$

35. 임의의 정수 k 에 대하여 $f(k) = 2k - 1$ 이라 하고, 연산 $\diamond$ 를 $f(m)\diamond f(n) = f(2m + n)$ 로 정의한다. 이 때, $-3\diamond 5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(m) = -3, f(n) = 5$ 라 하면

$$2m - 1 = -3, 2n - 1 = 5$$

$$\therefore m = -1, n = 3$$

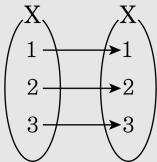
$$\therefore -3\diamond 5 = f(-1)\diamond f(3) = f(-2 + 3) = f(1) = 1$$

36. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$ 즉 $f = I$ (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



37. 집합 $S = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}\right\}$ 의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}$ 이라 하자. 각 집합 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}$ 에서 최소인 원소를 각각 뽑아 이들을 모두 더한 값을 구하면 $\frac{p}{q}$ (p, q 는 서로소)이다. 이 때, $p - q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 130

해설

㉠ $\frac{1}{3^4}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^4}$ 을 포함하는 S 의 부분집합의 수와 같다.

$\therefore 2^4$ 개

㉡ $\frac{1}{3^3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.

$\therefore 2^3$ 개

㉢ $\frac{1}{3^2}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^2}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.

$\therefore 2^2$ 개

㉣ $\frac{1}{3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.

$\therefore 2$ 개

㉤ 1 이 가장 작은 원소가 되는 경우는 1가지이다.

그러므로 구하는 값은 $\frac{1}{3^4} \times 2^4 + \frac{1}{3^3} \times 2^3 + \frac{1}{3^2} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 =$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1 = \frac{16 + 24 + 36 + 54 + 81}{81} =$$

$$\frac{211}{81}$$

$\therefore p = 211, q = 81$ 이므로 $p - q = 130$

38. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 두 부분집합이 A, B 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하여라.

(1) $A \cap B = \emptyset$

(2) $A \cup B = U$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$A \cap B = \emptyset$ 이고 $A \cup B = U$ 이면 $n(A) + n(B) = n(U) = 4$

$n(A) = 0, n(B) = 4$ 인 경우 : 1 개

$n(A) = 1, n(B) = 3$ 인 경우 : 4 개

$n(A) = 2, n(B) = 2$ 인 경우 : 6 개

$n(A) = 3, n(B) = 1$ 인 경우 : 4 개

$n(A) = 4, n(B) = 0$ 인 경우 : 1 개

따라서 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ (개)

39. 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 3 개, 8 개, 10 개이다. $(A-C) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$ 를 만족하는 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(C-A) + n(C-B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(A - C) \cup (B \cap C^c) = \emptyset \text{ 는}$$

$$A - C = \emptyset, B - C = \emptyset \rightarrow A \subset C, B \subset C$$

$$\therefore n(C - A) + n(C - B) = (10 - 3) - (10 - 8) = 5$$

40. 1 부터 어떤 수까지의 자연수 중 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 $P_{(k)}$ 라고 정의한다. $n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때, $n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)}))$ 를 a, b, c 로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b - c$

해설

$n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때

$$\begin{aligned} & n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)})) \\ &= n(P_3 \cup P_4) \\ &= n(P_3) + n(P_4) - n(P_{12}) \\ &= a + b - c \end{aligned}$$

41. a, b, c 는 서로 다른 수이고 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{c} = k$ 를 만족한다. 이때, $k^2 + k$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$b = ak, c = bk, a = ck$ 이므로 변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$\therefore k^3 = 1 (\because abc \neq 0)$

$\therefore (k-1)(k^2+k+1) = 0$ 에서

$k^2+k+1 = 0$ ($\because k=1$ 이면 $a=c$ 가 되어 모순)

$\therefore k^2+k = -1$