1. 집합 $A = \left\{k \mid k \leq 12,\ k\text{는 } 3\text{의 배수}\right\}$ 를 원소나열법으로 나타내면?

① $A = \{3, 6\}$ ② $A = \{3, 6, 9\}$

③ $A = \{3, 6, 9, 12\}$ ④ $A = \{3, 6, 9, 10, 12\}$

⑤ $A = \{3, 6, 9, 10, 11\}$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $B \subset A$

② $A \subset (A \cup B)$

③ $A \cup B = A$

④ $(A \cap B) \cup B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

$A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.
④ $A \cap B = B$ 이면 $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$ 이므로 옳지 않다.

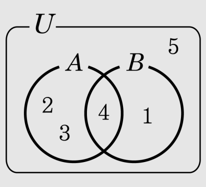
3. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고 A, B 가 다음 조건을 만족할 때, 집합 B 의 부분집합인 것은?

㉠ $A \cap B = \{4\}$	㉡ $A - B = \{2, 3\}$
㉢ $(A \cup B)^c = \{5\}$	

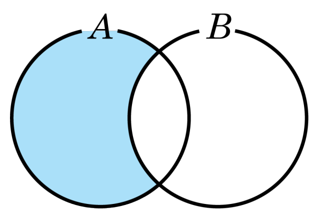
① $\{2\}$　② $\{3\}$　③ $\{2, 3\}$　④ $\{2, 5\}$　⑤ $\{4\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $B = \{1, 4\}$ 이다. 따라서 B 의 부분집합인 것은 $\{4\}$ 이다.



4. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내지 않는 것은?



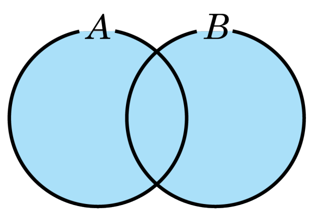
① $A \cap B^c$ ② $A - B$ ③ $(A \cup B) - B$

④ $B \cap A^c$ ⑤ $A - (A \cap B)$

해설

$A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$ 이므로 색칠한 부분을 나타내지 않는 것은 ④ 이다.

5. 다음 벤 다이어그램에서 $n(B) = 20$, $n(A-B) = 15$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 35 개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A \cup B$ 이다.
$A \cup B = (A-B) \cup B$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n((A-B) \cup B) \\ &= n(A-B) + n(B) \\ &= 15 + 20 \\ &= 35 \end{aligned}$$

(개) 이다.

6. 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2 - 6x + 8 = 0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 또는 $x = 4$, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$
② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$
③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$
⑤ 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

7. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2 \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

8. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$A = 3x^2 - xy + 2y^2$ $B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$

① $A < B$　② $A \leq B$　③ $A > B$

④ $A \geq B$　⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

9. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서 최댓값은 14이다.

10. 함수 $f(x)=2x+6,\ g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

해설

$(f\circ g)(x)=2g(x)+6=2(ax-1)+6$

$=2ax+4\ \cdots$ ㉠

$(g\circ f)(x)=af(x)-1=a(2x+6)-1$

$=2ax+6a-1\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $2ax+4=2ax+6a-1$

$4=6a-1$

$\therefore\ a=\frac{5}{6}$

11. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 「n이 홀수이면 n도 홀수이다.」임을 증명한 것이다.

> [증명]
> 주어진 명제의 (가)를 구해보면,
> 「n이 짝수이면 n^2도 짝수이다. 」
> 이 때, n이 짝수이면
> $n =$(나) (단, k는 자연수)로 놓을 수 있다.
> 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$이므로 n^2도 짝수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$ ③ 대우, $2k+1$

④ 역, $2k+1$ ⑤ 역, $4k^2$

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구해보면,
「n이 짝수이면 n^2도 짝수이다. 」
이 때, n이 짝수이면
$n = (2k)$ (단, k는 자연수)로 놓을 수 있다.
따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$이므로 n^2도 짝수이다.

12. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a}\times\frac{2c}{b}\times\frac{2a}{c}} = 3\times 2 = 6$

$\therefore \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 6$

13. 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 3\}$에 대하여 X에서 X로의 일차함수 $f(x) = ax + b$의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a와 b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$일 때 $f(-1) = -1,\ f(3) = 3$을 만족

$-a + b = -1,\ 3a + b = 3$

따라서 $a = 1,\ b = 0$

2) $a < 0$일 때 $f(-1) = 3,\ f(3) = -1$

$-a + b = 3,\ 3a + b = -1$

따라서 $a = -1,\ b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$a < 0$일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$

즉 $a + b = 1$

14. 함수 f가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

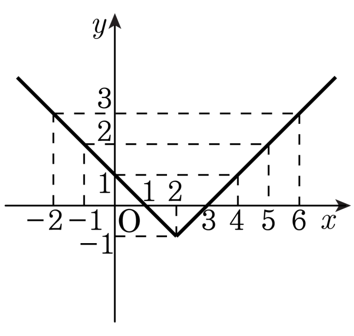
$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서

$x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)$, $f(0)=2f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

15. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

16. 두 일차함수 $f(x) = ax + b$ 와 $g(x) = a'x + b'$ 사이에 $f^{-1} = g$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a = a'$ ② $aa' = 1$ ③ $aa' = -1$

④ $a + a' = 0$ ⑤ $a + a' = -1$

해설

$y = ax + b$ 의 역함수를 구해 보면

$x = ay + b$ 에서 $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

즉, $f(x)$ 의 역함수는 $g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = a'x + b'$

따라서, $\frac{1}{a} = a'$ 에서 $aa' = 1$ 이다.

17. 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f(-1)=3,\ f^{-1}(15)=2$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하여라? (단, a, b는 상수이고 f^{-1}는 f의 역함수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=11$

해설

$f^{-1}(15)=2$에서 $f(2)=15$이므로

$f(2)=2a+b=15$

$f(-1)=-a+b=3$ 연립하여 풀면 $a=4,\ b=7$

$\therefore\ a+b=11$

18. 유리함수 $y=\dfrac{4x+3}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

$y=\dfrac{4x+3}{x+2}=\dfrac{4(x+2)-5}{x+2}=4+\dfrac{-5}{x+2}$이므로

$y=\dfrac{-5}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -2,

y축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$a+b+c=(-5)+(-2)+4=-3$

19. 함수 $y=\frac{2x+3}{x+4}$의 그래프는 점 (p, q)에 대하여 대칭이고, 동시에 $y=x+r$에 대하여 대칭이다. 이때, $p+q+r$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$y=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2(x+4)-5}{x+4}=\frac{-5}{x+4}+2$

따라서 $y=\frac{2x+3}{x+4}$의 그래프는 점 $(-4, 2)$에 대하여 대칭이고,

점 $(-4, 2)$를 지나고

기울기가 1인 직선 $y=x+6$에 대하여 대칭이다.

$\therefore p=-4$, $q=2$, $r=6$

$\therefore p+q+r=-4+2+6=4$

20. 함수 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}(d > 0)$ 와 $g(x) = \dfrac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f \circ g)(x) = x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x = m, y = n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ $-\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f \circ g = I$ 이므로

$g = f^{-1}$ 또는 $g^{-1} = f$

$y = g(x)$ 의 역함수를 구하면

$y = \dfrac{x+2}{3x+4} \Leftrightarrow 3yx + 4y = x + 2$

$\Leftrightarrow (3y-1)x = -4y + 2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-4y+2}{3y-1}$

$\therefore y = g^{-1}(x) = \dfrac{-4x+2}{3x-1},$

$$\begin{aligned} f(x) &= g^{-1}(x) \\ &= \frac{-4x+2}{3x-1} \\ &= \frac{ax+b}{cx+d}(d>0) \end{aligned}$$
이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-2}{-3x+1} \\ &= \frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x = \dfrac{1}{3}$, $y = -\dfrac{4}{3}$

$\therefore m = \dfrac{1}{3}$, $n = -\dfrac{4}{3}$

$\therefore m + n = -1$

21. 집합 $A = \left\{x \mid x\text{는 } 8 \text{ 의 약수}\right\}$ 일 때, 다음 조건을 모두 만족하는 집합 P 의 갯수를 구하여라.

$P \subset A$ $1 \in P$

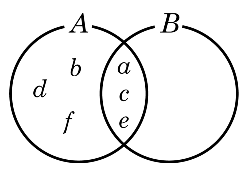
▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A를 원소나열법으로 나타내면
$A = \{1, 2, 4, 8\}$이고, 조건에서
$P \subset A$이고 1을 원소로 가지는 집합 P를 구하면 $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 8\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 8\}$, $\{1, 4, 8\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$이므로, 개수는 모두 8 개 이다.

22. 다음 벤 다이어그램에서 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A\cap B=\{a,c,e\}$ 가 성립할 때, 다음 중 집합 B 가 될 수 있는 것은?



① $\{a,b,c,d,e\}$ ② $\{a,c,d,e,g\}$ ③ $\{b,d,e,f,g\}$

④ $\{a,c,d,e,g\}$ ⑤ $\{a,c,e,g,h\}$

해설

집합 B 는 반드시 $A\cap B=\{a,c,e\}$ 을 포함하여야 한다.
그러나 A 집합에만 존재하는 원소 b,d,f 는 들어갈 수 없다.
① b,d 가 포함되어서 옳지 않다.
② d 가 포함되어서 옳지 않다.
③ b,d,f 가 포함되어서 옳지 않다.
④ d 가 포함되어서 옳지 않다.

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 세 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{1, 2, 5\}$ 에서 $A \bigstar B = (A - B) \cup (B - A)$ 라 할 때, 집합 $(A \bigstar B) \bigstar C$ 의 원소의 합을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$A \bigstar B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 4\}$

$\{1, 2, 4\} \bigstar C = (\{1, 2, 4\} - C) \cup (C - \{1, 2, 4\})$

$= \{4, 5\}$

$\therefore (A \bigstar B) \bigstar C = \{4, 5\}$

24. 어느 지역에서 ㉠신문을 보는 학생이 전체의 0.5, ㉡신문을 보는 학생이 0.6, ㉠신문과 ㉡신문을 모두 보는 학생이 전체의 0.3이었다. 신문을 보지 않는 학생은 전체의 몇 % 인가?

① 5 %　　② 10 %　　③ 15 %　　④ 20 %　　⑤ 25 %

해설

㉠신문과 ㉡신문을 보는 학생의 집합을 A, B라 하고, 전체 학생의 수를 K라 하면 $n(A) = 0.5K$, $n(B) = 0.6K$, $n(A \cap B) = 0.3K$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서 $n(A \cup B) = 0.8K$

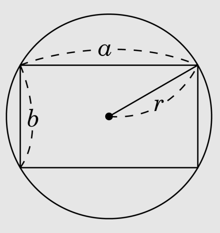
$\therefore$ 신문을 보지 않는 학생의 수는 $K - n(A \cup B) = 0.2K$

그러므로 $\dfrac{0.2K}{K} \times 100 = 20(\%)$

25. 반지름이 $r(\mathrm{cm})$ 인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r(\mathrm{cm}^2)$ ② $r^2(\mathrm{cm}^2)$ ③ $2r^2(\mathrm{cm}^2)$
④ $\sqrt{2}r^2(\mathrm{cm}^2)$ ⑤ $\frac{r^2}{2}(\mathrm{cm}^2)$

해설



$a^2+b^2=(2r)^2$
산술기하평균의 관계에 의해
$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$
$4r^2 \geq 2(ab)$
$ab \leq 2r^2$,
(직사각형 넓이의 최댓값) $=2r^2$