

1. 집합 $A = \{k \mid k \leq 12, k \text{는 } 3\text{의 배수}\}$ 를 원소나열법으로 나타내면?

① $A = \{3, 6\}$

② $A = \{3, 6, 9\}$

③ $A = \{3, 6, 9, 12\}$

④ $A = \{3, 6, 9, 10, 12\}$

⑤ $A = \{3, 6, 9, 10, 11\}$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $B \subset A$

② $A \subset (A \cup B)$

③ $A \cup B = A$

④ $(A \cap B) \cup B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

$A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.

④ $A \cap B = B$ 이면 $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$ 이므로 옳지 않다.

3. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고 A, B 가 다음 조건을 만족할 때, 집합 B 의 부분 집합인 것은?

㉠ $A \cap B = \{4\}$

㉡ $A - B = \{2, 3\}$

㉢ $(A \cup B)^c = \{5\}$

① $\{2\}$

② $\{3\}$

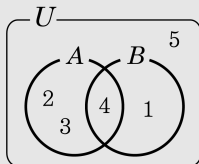
③ $\{2, 3\}$

④ $\{2, 5\}$

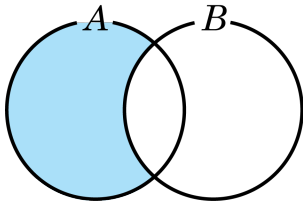
⑤ $\{4\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $B = \{1, 4\}$ 이다. 따라서 B 의 부분집합인 것은 $\{4\}$ 이다.



4. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내지 않는 것은?



① $A \cap B^c$

② $A - B$

③ $(A \cup B) - B$

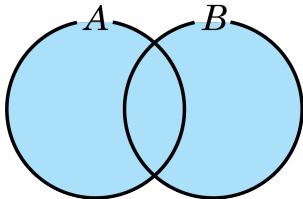
④ $B \cap A^c$

⑤ $A - (A \cap B)$

해설

$A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$ 이므로 색칠한 부분을 나타내지 않는 것은 ④ 이다.

5. 다음 벤 다이어그램에서 $n(B) = 20$, $n(A - B) = 15$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 35 개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A \cup B$ 이다.

$$A \cup B = (A - B) \cup B \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n((A - B) \cup B) \\ &= n(A - B) + n(B) \\ &= 15 + 20 \\ &= 35 \end{aligned}$$

(개) 이다.

6. 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 조건 ' $x^2 - 6x + 8 = 0$ ' 의 진리집합은 $\{2, 3\}$ 이다.
- ② 조건 ' x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1, 3, 5\}$ 이다.
- ③ 조건 ' x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0, 1, 2, 4\}$ 이다.
- ④ 조건 ' $0 \leq x < 4$ 이고 $x \neq 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$ 이다.
- ⑤ 조건 ' x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1, 2, 3\}$ 이다.

해설

- ① $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 또는 $x = 4$
 , 따라서, 진리집합은 $\{2, 4\}$
- ② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2, 3, 5\}$
- ③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 4\}$
- ④ $x = 0, 1, 2, 3$ 이고 $x \neq 2$ 이므로 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$
- ⑤ 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 3, 6\}$

7. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.

③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.

⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

8. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$

$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

9. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

10. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ &= 2ax + 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ &= 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

11. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 「 n 이 홀수이면 n 도 홀수이다.」임을 증명한 것이다.

[증명]

주어진 명제의 (가)를 구해보면,

「 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.」

이 때, n 이 짝수이면

$n = (2k)$ (단, k 는 자연수)로 놓을 수 있다.

따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 대우, $2k$

② 대우, $4k$

③ 대우, $2k + 1$

④ 역, $2k + 1$

⑤ 역, $4k^2$

해설

[증명]

주어진 명제의 대우를 구해보면,

「 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.」

이 때, n 이 짝수이면

$n = (2k)$ (단, k 는 자연수)로 놓을 수 있다.

따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

12. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

13. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a 와 b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$ 일 때 $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$ 을 만족

$$-a + b = -1, 3a + b = 3$$

따라서 $a = 1$, $b = 0$

2) $a < 0$ 일 때 $f(-1) = 3$, $f(3) = -1$

$$-a + b = 3, 3a + b = -1$$

따라서 $a = -1$, $b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$ 일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$$a < 0 \text{일 때 } a + b = -1 + 2 = 1$$

즉 $a + b = 1$

14. 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족할 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

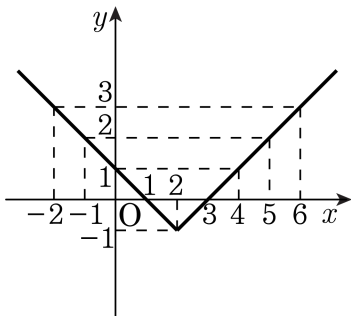
$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서

$x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$$f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 2f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

15. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면

$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$

$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$

$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$

따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

16. 두 일차함수 $f(x) = ax + b$ 와 $g(x) = a'x + b'$ 사이에 $f^{-1} = g$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a = a'$

② $aa' = 1$

③ $aa' = -1$

④ $a + a' = 0$

⑤ $a + a' = -1$

해설

$y = ax + b$ 의 역함수를 구해 보면

$$x = ay + b \text{ 에서 } y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\text{즉, } f(x) \text{ 의 역함수는 } g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = a'x + b'$$

따라서, $\frac{1}{a} = a'$ 에서 $aa' = 1$ 이다.

17. 일차함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(-1) = 3$, $f^{-1}(15) = 2$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라? (단, a, b 는 상수이고 f^{-1} 는 f 의 역함수)

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = 11$

해설

$f^{-1}(15) = 2$ 에서 $f(2) = 15$ 이므로

$$f(2) = 2a + b = 15$$

$f(-1) = -a + b = 3$ 연립하여 풀면 $a = 4$, $b = 7$

$$\therefore a + b = 11$$

18. 유리함수 $y = \frac{4x+3}{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = \frac{4x+3}{x+2} = \frac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 + \frac{-5}{x+2} \text{ 이므로}$$

$$y = \frac{-5}{x} \text{ 의 그래프를 } x\text{축 방향으로 } -2,$$

y 축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$a+b+c = (-5) + (-2) + 4 = -3$$

19. 함수 $y = \frac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p, q) 에 대하여 대칭이고, 동시에 $y = x + r$ 에 대하여 대칭이다. 이때, $p + q + r$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(x+4)-5}{x+4} = \frac{-5}{x+4} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4, 2)$ 에 대하여 대칭이고,

점 $(-4, 2)$ 를 지나고

기울기가 1 인 직선 $y = x + 6$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore p = -4, q = 2, r = 6$$

$$\therefore p + q + r = -4 + 2 + 6 = 4$$

20. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($d > 0$) 와 $g(x) = \frac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f \circ g)(x) = x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x = m, y = n$ 일 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ $-\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f \circ g = I$ 이므로

$$g = f^{-1} \text{ 또는 } g^{-1} = f$$

$y = g(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y = \frac{x+2}{3x+4} \Leftrightarrow 3yx + 4y = x + 2$$

$$\Leftrightarrow (3y-1)x = -4y+2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4y+2}{3y-1}$$

$$\therefore y = g^{-1}(x) = \frac{-4x+2}{3x-1},$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g^{-1}(x) \\ &= \frac{-4x+2}{3x-1} \\ &= \frac{ax+b}{cx+d} \quad (d > 0) \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-2}{-3x+1} \\ &= \frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{점근선의 방정식은 } x = \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m = \frac{1}{3}, n = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m + n = -1$$

21. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 조건을 모두 만족하는 집합 P 의 갯수를 구하여라.

$$P \subset A$$

$$1 \in P$$

▶ 답:

▷ 정답: 8개

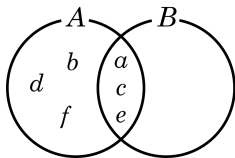
해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이고, 조건에서

$P \subset A$ 이고 1을 원소로 가지는 집합 P 를 구하면 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로, 개수는 모두 8개이다.

22. 다음 벤 다이어그램에서 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$,
 $A \cap B = \{a, c, e\}$ 가 성립할 때, 다음 중 집합
 B 가 될 수 있는 것은?



- ① $\{a, b, c, d, e\}$ ② $\{a, c, d, e, g\}$ ③ $\{b, d, e, f, g\}$
 ④ $\{a, c, d, e, g\}$ ⑤ $\{a, c, e, g, h\}$

해설

집합 B 는 반드시 $A \cap B = \{a, c, e\}$ 을 포함하여야 한다.
 그러나 A 집합에만 존재하는 원소 b, d, f 는 들어갈 수 없다.

- ① b, d 가 포함되어서 옳지 않다.
 ② d 가 포함되어서 옳지 않다.
 ③ b, d, f 가 포함되어서 옳지 않다.
 ④ d 가 포함되어서 옳지 않다.

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 세 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{1, 2, 5\}$ 에서 $A \star B = (A - B) \cup (B - A)$ 라 할 때, 집합 $(A \star B) \star C$ 의 원소의 합을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$A \star B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 4\}$$

$$\begin{aligned} \{1, 2, 4\} \star C &= (\{1, 2, 4\} - C) \cup (C - \{1, 2, 4\}) \\ &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

$$\therefore (A \star B) \star C = \{4, 5\}$$

24. 어느 지역에서 ㉠신문을 보는 학생이 전체의 0.5, ㉡신문을 보는 학생이 0.6, ㉠신문과 ㉡신문을 모두 보는 학생이 전체의 0.3이었다. 신문을 보지 않는 학생은 전체의 몇 % 인가?

① 5 %

② 10 %

③ 15 %

④ 20 %

⑤ 25 %

해설

㉠신문과 ㉡신문을 보는 학생의 집합을 A , B 라 하고, 전체 학생의 수를 K 라 하면 $n(A) = 0.5K$, $n(B) = 0.6K$, $n(A \cap B) = 0.3K$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서 $n(A \cup B) = 0.8K$
 $\therefore$ 신문을 보지 않는 학생의 수는 $K - n(A \cup B) = 0.2K$

그러므로 $\frac{0.2K}{K} \times 100 = 20(\%)$

25. 반지름이 r (cm)인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r(\text{cm}^2)$

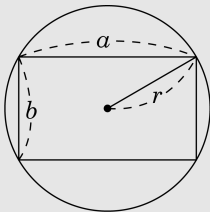
② $r^2(\text{cm}^2)$

③ $2r^2(\text{cm}^2)$

④ $\sqrt{2}r^2(\text{cm}^2)$

⑤ $\frac{r^2}{2}(\text{cm}^2)$

해설



$$a^2 + b^2 = (2r)^2$$

산술기하평균의 관계에 의해

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$$

$$4r^2 \geq 2(ab)$$

$$ab \leq 2r^2,$$

$$(\text{직사각형 넓이의 최댓값}) = 2r^2$$