

1. 분식집에서 1주년 개업기념을 맞이하여 특별히 학생들의 기호에 맞추어 새로운 메뉴판을 제작하기로 했다. 다음 중 집합인 것은?

- ① 가격이 2000 원인 음식
 ② 여학생들이 좋아하는 음식
 ③ 남학생들이 좋아하는 음식
 ④ 가격이 비교적 싼 음식
 ⑤ 맛있는 음식

메뉴	가격
라면	2000원
김밥	1000원
볶음밥	2000원
우동	2000원
순대	2000원
떡볶이	1000원
냉면	2000원

해설

- ① 가격이 2000 원으로 명확하게 기준이 정해져 있으므로 집합이다.
 ②, ③ 남학생과 여학생에 대한 정보가 없고 ‘좋아하는’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 아니다.
 ④ ‘비교적 싼’이라는 단어는 그 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.
 ⑤ ‘맛있는’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 아니다.

2. 다음 각 집합을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것을 보기에서 골라라.

보기

- ㉠ $\{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$
- ㉡ $\{x|x\text{는 } 10\text{보다 작은 } 2\text{의 배수}\}$
- ㉢ $\{x|x\text{는 } 24\text{의 약수}\}$
- ㉣ $\{x|x\text{는 } 18\text{의 약수}\}$
- ㉤ $\{x|x\text{는 } 36\text{의 배수}\}$

(1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(2) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

조건제시법은 집합에 속하는 모든 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 나타내는 방법이다.

(1) 집합의 원소들의 공통된 성질은 10 이하의 짝수(2의 배수)라는 점이고

(2) 집합의 원소들의 공통된 성질은 18의 약수라는 점이다.

3. 다음 중 부분집합의 개수가 8 개인 것은?

① $\{L, O, V, E\}$

② $\{x \mid x \text{는 } 25 \text{의 약수}\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } -2 \leq x \leq 0 \text{인 자연수}\}$

④ $\{x \mid x \text{는 짝수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 소수}\}$

해설

① 16 개 ② 8 개 ③ $\emptyset$

④ 무한집합 ⑤ 16 개

4. 집합 $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 30, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A - B^c$ 의 원소의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 5개

④ 7개

⑤ 8개

해설

$$A - B^c = A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$$

$\therefore$ 5개

5. $p : x = 3$, $q : x^2 = 3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $P = \{3\}$, $Q = \{0, 3\}$
이므로 $P \subset Q$, $Q \not\subset P \therefore$ 충분조건

6. 등식 $a(1 + 3\sqrt{2}) + b(2 - \sqrt{2}) = -4 + 9\sqrt{2}$ 를 만족하는 유리수 a, b 의 값은?

① $a = 1, b = -3$

② $a = 1, b = -2$

③ $a = 2, b = -3$

④ $a = -2, b = -1$

⑤ $a = -2, b = 3$

해설

$$(a + 2b) + (3a - b)\sqrt{2} = -4 + 9\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{cases} a + 2b = -4 \\ 3a - b = 9 \end{cases} \text{ 를 연립하면,}$$

$$\therefore a = 2, b = -3$$

7. 두 집합 $A = \{x \mid a \leq 2x + 1 \leq 9\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq b\}$ 가 서로 같을 때, 상수 a, b 의 합은? (단, 집합 A, B 는 공집합이 아니다.)

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$$a \leq 2x + 1 \leq 9 \text{에서}$$

$$a - 1 \leq 2x \leq 8, \frac{a-1}{2} \leq x \leq 4$$

$$\therefore A = \left\{ x \mid \frac{a-1}{2} \leq x \leq 4 \right\},$$

$$B = \{x \mid -2 \leq x \leq b\}$$

이때, $A = B$ 이므로

$$\frac{a-1}{2} = -2, b = 4$$

$$a = -3, b = 4$$

$$\therefore a + b = 1$$

8. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A - (A \cap B)$ 는?

① $\{1\}$

② $\{3\}$

③ $\{1, 3\}$

④ $\{3, 5\}$

⑤ $\{1, 5\}$

해설

$A - (A \cap B) = A - B = \{1, 3, 5, 6\} - \{5, 6\} = \{1, 3\}$ 이다.

9. $n(A) = 26$, $n(B) = 17$ 이고, $n(A \cap B) = 8$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

① 9

② 11

③ 18

④ 25

⑤ 26

해설

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = 26 - 8 = 18$$

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

11. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로

$$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10 \text{에서}$$

$$3x^2 - 12x - 15 = 0, 3(x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 5, -1$$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.

$$\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$$

12. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 6개

⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

13. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

⑤ -6

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$$

$$= -(ax + b) + a = -ax + a - b \text{ 이므로 } -ax + a - b = 2x - 4$$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = -2, b = 2$$

$$\therefore ab = -4$$

14. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일 대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

- ㉠ $f \circ g = g \circ f$
 ㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
 ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$
 ㉤ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉤

③ ㉢, ㉤

④ ㉠, ㉡, ㉤

⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.

$\therefore$ 옳지 않다.

㉡ 함수의 합성에서 결합법칙은 성립한다.

$\therefore$ 옳다.

$$\begin{aligned} \text{㉢ } (f \circ g \circ h)^{-1} &= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1} \\ &= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1} \end{aligned}$$

$\therefore$ 옳지 않다.

㉤ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로

$$f \circ g = I \text{ 에서 } f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$$

$\therefore g = f^{-1} \therefore$ 옳다.

15. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\
 &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2
 \end{aligned}$$

16. 분수식 $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{x}$

해설

$$(\text{준 식}) = 1 - \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

17. $\frac{x}{5} = \frac{y+4z}{2} = \frac{z}{3} = \frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = -25$

해설

$$\frac{-x + 2(y + 4z) - 8 \times z}{-5 + 2 \times 2 - 8 \times 3}$$
$$= \frac{-x + 2y + 8z - 8z}{-5 + 4 - 24} = \frac{-x + 2y}{-25}$$

$$\therefore A = -25$$

18. 분수함수 $y = \frac{3x-2}{2-x}$ 의 점근선의 방정식이 $x = a$, $y = b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 점근선은 $x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$ 이므로

주어진 분수함수의 점근선은 $x = 2$, $y = -3$ 이다.

$$\therefore 2 + (-3) = -1$$

19. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$$

20. 두 집합 $A = \{\neg, \square, \supset, \wedge\}$, $B = \{\wedge, \perp, \square, \supset\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 한글 자음을 차례대로 구한 것은?

① $\supset, \wedge$

② $\neg, \supset$

③ $\neg, \wedge$

④ $\perp, \neg$

⑤ $\supset, \wedge$

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 A, B 의 모든 원소가 같아야 하므로 두 집합을 비교하면 집합 A 의 $\square = \perp$ 이고, 집합 B 의 $\square = \neg$ 이다.

21. 두 조건 $p : 3 < x < 5$, $q : |x - 1| < a$ 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되는 실수 a 의 범위는?

① $0 < a < 4$

② $a \geq 4$

③ $0 \leq a < 3$

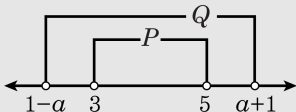
④ $a > 4$

⑤ $0 < a < 3$

해설

$$p \rightarrow q(T) \Rightarrow P \subset Q$$

$$Q : -a < x - 1 < a \Rightarrow 1 - a < x < a + 1$$



$$\therefore 1 - a \leq 3 \text{ 그리고 } 5 \leq a + 1$$

$$\therefore -2 \leq a \text{ 그리고 } 4 \leq a$$

$$\therefore a \geq 4$$

22. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 에서 양변을 y^2 으로 나누면

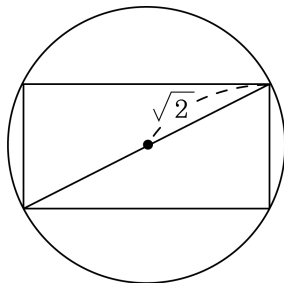
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수 x, y 에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

23. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6

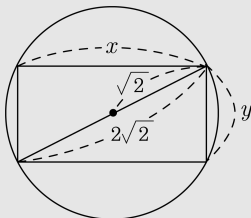
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y ($x > 0, y > 0$) 라고 하면

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

24. 작년에 16만원하던 자전거와 4만원하던 헬멧이 올해는 각각 5%, 10%씩 인상되었다. 자전거와 헬멧을 한 세트로 보았을 때, 한 세트의 인상률은?

- ① 6% ② 7% ③ 7.5% ④ 8% ⑤ 15%

해설

지난해 자전거, 헬멧 한 세트의 가격은 $16 + 4 = 20$ 만원
올해 자전거는 $0.05 \times 16 = 0.8$, 즉 8천원 인상.

헬멧은 $0.10 \times 4 = 0.4$, 즉 4천원 인상.

한 세트에 1만 2천원 인상되었다.

따라서 전체의 인상률은 $\frac{1.2}{20} = \frac{6}{100} = 6(\%)$

25. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ 의 소수 부분을 b 라 할 때, $\frac{b^2}{2} + \frac{2}{b^2}$ 의 값은?

① 6

② 5

③ 4

④ 3

⑤ 2

해설

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 3 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}, 1 < \sqrt{3} < 2 \text{에서}$$

$$4 < 3 + \sqrt{3} < 5$$

$$\therefore 3 + \sqrt{3} = 4 + b$$

$$\therefore b = \sqrt{3} - 1$$

$$\therefore \frac{b^2}{2} + \frac{2}{b^2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} + \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$