1. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1,\ 4\}$를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

1, 4를 뺀 $\{2, 3, 5\}$의 진부분집합의 개수는 $2^3 - 1 = 7$(개)이다.

2. $A = \{1,\ 2,\ 4\}$, $B = \{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 구하면?

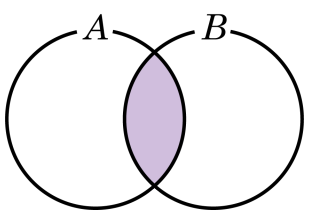
① $\{2\}$　② $\{2,\ 6\}$　③ $\{2,\ 4,\ 6\}$

④ $\{5,\ 6\}$　⑤ $\{2,\ 4\}$

해설

$A \cap B$ 은 A 에도 속하고 B 에도 속하는 공통 부분이므로 $\{2,\ 4\}$ 이다.

3. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 30 이하의 3의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 48의 약수$\}$ 일 때, 다음의 벤 다이어그램에서 색칠한 부분의 집합의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 45

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면
$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ 이다.
벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.

공통 부분의 원소는 $\{3, 6, 12, 24\}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 원소의 합은
$3 + 6 + 12 + 24 = 45$ 이다.

4. 두 집합 $A = \{a-1,\ 6, 7\}$, $B = \{a,\ 4, 6\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 6\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$4 \in A$ 이므로 $a-1 = 4$

$\therefore a = 5$

5. 두 집합 $n(A)=12, n(B)=14, n(A\cap B)=8$ 일 때, $n(B-A)$ 는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=14-8=6$

6. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \le 3^{3n}$

④ $2^{4n} \ge 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

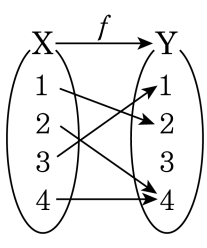
해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

7. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

> ㉠ 함수가 아니다.
> ㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다.
> ㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다.
> ㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다.
> ㉤ 일대일대응이다.

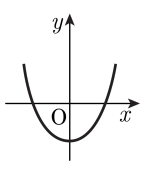


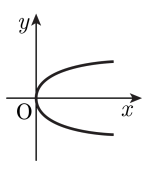
① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

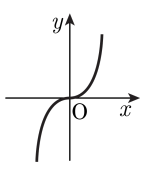
해설

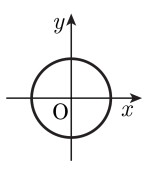
㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 $1, 2, 3, 4$ 이다.
㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $Y \neq f(x)$ 이므로 일대일대응이 아니다.

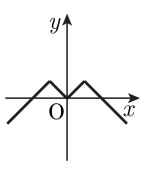
8. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$f(x) = \begin{cases} 0 & (x\text{는 유리수}) \\ \sqrt{2} & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{는 유리수}) \\ \sqrt{3} & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 일 때, $(g \circ f)(\pi)$의 값은 얼마인가?.

① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

해설

$(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}$

10. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1,\ f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$ 로 놓으면,
$f(1) = -1,\ f(2) = 3$ 이므로
$f(1) = a + b = -1,\ f(2) = 2a + b = 3$
즉, $a = 4,\ b = -5$
$\therefore\ f(x) = 4x - 5$
$f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$
$4a - 5 = 1 \quad \therefore\ a = \frac{3}{2}$
따라서 $f^{-1}(1) = \frac{3}{2}$, $2f^{-1}(1) = 3$

11. $A = \{x \mid x$는 30 이하의 4의 배수$\}$, $B = \{4,\ 28,\ 16,\ 8,\ a,\ b,\ 20\}$ 인 집합 A, B 에 대하여 $A = B$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28\}$ 이고
$B = \{4,\ 8,\ 16,\ 20,\ 28,\ a,\ b\}$ 이므로
$a + b = 12 + 24 = 36$ 이다.

12. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ 이고, 두 부분집합 $A = \{a, c, d, e, h\}$,
$B = \{b, f, h\}$ 일 때, $A^c \cap B$는?

① $\{b\}$ ② $\{f\}$ ③ $\{b, f\}$ ④ $\{h\}$ ⑤ $\{b, h\}$

해설

$A^c = \{b, f, g\}$
$B = \{b, f, h\}$
$A^c \cap B = \{b, f\}$

13. 학생 수가 40 명인 희정이네 반 학생들은 교내 백일장에 참가하여 시를 써서 제출한 학생이 22 명, 시와 수필을 모두 써서 제출한 학생이 9 명, 시와 수필을 모두 제출하지 않은 학생이 13 명이었을 때, 수필을 써서 제출한 학생 수는?

① 10 명 ② 11 명 ③ 12 명 ④ 13 명 ⑤ 14 명

해설

$n(U)=40, n(A)=22, n(A\cap B)=9, n((A\cup B)^c)=13$ 이다.
$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^c)=40-13=27$ 이다.
$n(B)=n(A\cup B)-n(A)+n(A\cap B)=27-22+9=14$ 이다.

14. 실수 전체집합에 대하여 세 조건 p, q, r 이 아래와 같을 때 다음 중 참인 명제는?

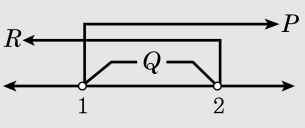
$p : x > 1,\ q : 1 < x < 2,\ r : x < 2$

① $p \to q$　② $p \to r$　③ $q \to r$

④ $r \to p$　⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$p :\ x > 1,\ \ q :\ 1 < x < 2,\ \ r :\ x < 2$



$\therefore\ Q \subset P,\ Q \subset R$ 이므로 $q \to p,\ \ q \to r$ (참)

15. 명제 「$0 < x < 1$ 이면 $|x - a| < 1$ 이다.」가 참이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구할 때 정수의 개수는 ?

① 1개 ② 2개 ③ 0개 ④ 3개 ⑤ 5개

해설

$|x - a| < 1$에서 $-1 < x - a < 1$

$\therefore a - 1 < x < a + 1$

$\{x \mid 0 < x < 1\} \subset \{x \mid a - 1 < x < a + 1\}$ 이어야 한다.

$\therefore a - 1 \le 0,\ a + 1 \ge 1$ 에서 $0 \le a \le 1$

$\therefore\ a = 0,\ 1$

$\therefore$ 정수의 개수는 2개

16. 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 p의 필요조건, q는 r의 충분조건이고 r는 p의 충분조건이다. 이 때, p는 r이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q는 p의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q$ ····· ㉠
q는 r의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$ ····· ㉡
r는 p의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p$ ····· ㉢
㉠ , ㉡ 에서 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$이므로
$p \Rightarrow r$ ····· ㉣
㉢, ㉣에서 $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow r$이므로 $r \leftrightarrow p$이다.
∴ 필요충분조건

17. $a > 1$ 일 때, $a + \dfrac{4}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a + \dfrac{4}{a-1} = a - 1 + \dfrac{4}{a-1} + 1$

산술기하조건을 이용하면

$a - 1 + \dfrac{4}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1) \times \dfrac{4}{a-1}} = 4$

$\therefore$ 최솟값은 $4 + 1 = 5$

18. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여 $f(f(f(x))) = x$가 되는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여
$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$
$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$
$f(f(f(x))) = x$이므로 $8x - 21 = x$
$\therefore x = 3$

19. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2+3) = f(2) = 2+5 = 7$
$f^{-1}(2) = t$ 라 하면 $f(t) = 2$
그런데 $x+5 \geq 5$ $(\because\ x \geq 0)$ 이고
$-x^2+3 < 3$ $(\because\ x < 0)$ 이므로 $-t^2+3 = 2$
$\therefore\ t = f^{-1}(2) = -1$ $(\because\ t < 0) \cdots$ ㉠
따라서 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$

20. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left|4\left(x - \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$\frac{a}{4} = 3$, $b = -2$

$\therefore a = 12$, $b = -2$ $\therefore a + b = 10$

21. 집합 $A = \{x \mid x$는 n미만의 자연수$\}$ 이고 집합 B 는 A 의 모든 부분집합을 원소로 하는 집합이다. 집합 B 의 부분집합의 개수가 256 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2^k = 256 = 2^8 \quad \therefore k = 8$

B 의 원소의 개수가 8 개 이므로, 집합 A 의 부분집합의 수는 8 개이다.

$2^{(n\text{미만의 자연수 개수})} = 2^{n-1} = 8 = 2^3 \quad \therefore n = 4$

22. 지윤이네 학교 학생 170 명 중 A 문제를 푼 학생이 80 명, B 문제를 푼 학생이 90 명, A 문제와 B 문제를 모두 푼 학생이 15 명일 때, A 문제와 B 문제 중 어느 것도 풀지 못한 학생은 몇 명인가?

① 10 명 ② 12 명 ③ 14 명 ④ 15 명 ⑤ 16 명

해설

전체집합을 U, A 문제를 푼 학생들의 집합을 A, B 문제를 푼 학생들의 집합을 B 라고 하면

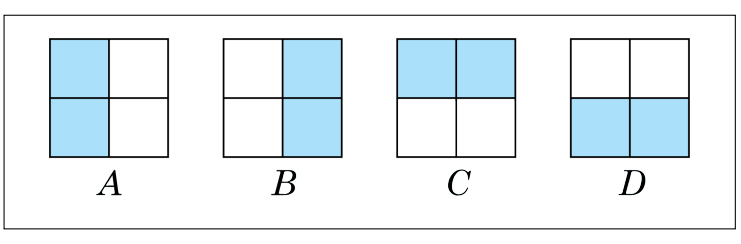
$n(U) = 170$

$n(A) = 80,\ n(B) = 90,\ n(A \cap B) = 15$

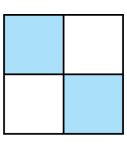
$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 80 + 90 - 15 \\ &= 155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 170 - 155 \\ &= 15 \end{aligned}$$

23. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



다음 그림을 위의 집합 A, B, C, D 와 연산 기호를 사용하여 옳게 표현한 것은?



① $(A \cup B) - (A \cap B)$
② $(D \cup C) - (B \cap C)$
③ $(A \cup D) - (A \cap D)$
④ $(A - C) \cup (C - B)$
⑤ $(A - D) \cup (B - A)$

해설

$(A \cup D) - (A \cap D)$

24. 두 집합 $A = \{5,\ 2a+1,\ 11\}$, $B = \{6-a,\ 3a-2,\ 13\}$에 대하여 $A \cap B = \{7\}$일 때, $B - A$는?

① $\{5,\ 7,\ 11\}$　② $\{3,\ 7,\ 13\}$　③ $\{5,\ 11\}$

④ $\{3,\ 13\}$　⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$이므로 $7 \in A$, $7 \in B$이다.

$2a + 1 = 7 \quad \therefore\ a = 3$

$B = \{6-3,\ 3\times 3-2,\ 13\} = \{3,\ 7,\ 13\}$

$B - A = \{3,\ 13\}$

25. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

Ⅰ. $1+a>\sqrt{1+2a}$
Ⅱ. $\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$
Ⅲ. $a+\frac{1}{a}\geq 2$
Ⅳ. $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$
Ⅴ. $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)\geq 4$
Ⅵ. $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 25$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

Ⅰ. $(1+a)^2-(\sqrt{1+2a})^2$
$=a^2>0\ (\because a>0)$
$\therefore (1+a)>\sqrt{1+2a}\ (\bigcirc)$

Ⅱ. $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$
$\therefore \sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}\ (\bigcirc)$

Ⅲ. $a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2\ (\bigcirc)$

Ⅳ. $\frac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab}=\frac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
$=\frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\leq 0$
$\therefore \frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\ (\bigcirc)$

Ⅴ. $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$
$\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{2b}{a}}=4$
$\therefore 4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\geq 8\ (\times)$

Ⅵ $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}$
$\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{8b}{a}}=8$
$\therefore (2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}\geq 25\ (\bigcirc)$