

1. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

- ① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

1, 4를 뺀 $\{2, 3, 5\}$ 의 진부분집합의 개수는 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$ 이다.

2. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 구하면?

① $\{2\}$

② $\{2, 6\}$

③ $\{2, 4, 6\}$

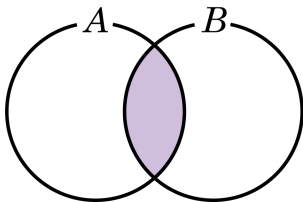
④ $\{5, 6\}$

⑤ $\{2, 4\}$

해설

$A \cap B$ 은 A 에도 속하고 B 에도 속하는 공통 부분이므로 $\{2, 4\}$ 이다.

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 48 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음의 벤 다이어그램에서 색칠한 부분의 집합의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 45

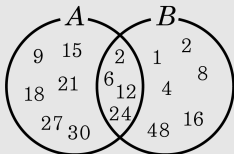
해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$,

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ 이다.

벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



공통 부분의 원소는 $\{3, 6, 12, 24\}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 원소의 합은

$3 + 6 + 12 + 24 = 45$ 이다.

4. 두 집합 $A = \{a - 1, 6, 7\}$, $B = \{a, 4, 6\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 6\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$4 \in A$ 이므로 $a - 1 = 4$

$\therefore a = 5$

5. 두 집합 $n(A) = 12, n(B) = 14, n(A \cap B) = 8$ 일 때, $n(B - A)$ 는?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 14 - 8 = 6$$

6. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$

② $2^{4n} > 3^{3n}$

③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$

⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

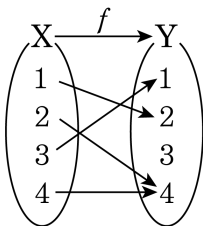
해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

7. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ 함수가 아니다.
- ㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다.
- ㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다.
- ㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다.
- ㉤ 일대일대응이다.



① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

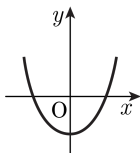
⑤ 5개

해설

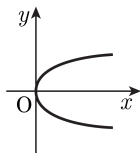
- ㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
- ㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 1, 2, 3, 4이다.
- ㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
- ㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $Y \neq f(x)$ 이므로 일대일대응이 아니다.

8. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?

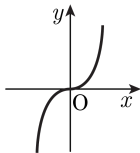
①



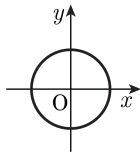
②



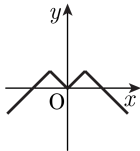
③



④



⑤



해설

②, ④의 그래프는 하나의 x 의 값에 대응되는 y 가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x 축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X 에서 Y 로의 함수)

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{는 유리수}) \\ \sqrt{2} & (x \text{는 무리수}) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{는 유리수}) \\ \sqrt{3} & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{일 때, } (g \circ$$

$f)(\pi)$ 의 값은 얼마인가?.

① 0

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 1

⑤ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

해설

$$(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

10. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1$, $f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 로 놓으면,

$f(1) = -1$, $f(2) = 3$ 이므로

$$f(1) = a + b = -1, f(2) = 2a + b = 3$$

즉, $a = 4$, $b = -5$

$$\therefore f(x) = 4x - 5$$

$f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$

$$4a - 5 = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(1) = \frac{3}{2}, 2f^{-1}(1) = 3$$

11. $A = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{4, 28, 16, 8, a, b, 20\}$ 인 집합 A, B 에 대하여 $A = B$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$ 이고

$B = \{4, 8, 16, 20, 28, a, b\}$ 이므로

$a + b = 12 + 24 = 36$ 이다.

12. 전체 집합 $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ 이고, 두 부분집합 $A = \{a, c, d, e, h\}$,
 $B = \{b, f, h\}$ 일 때, $A^c \cap B$ 는?

① $\{b\}$

② $\{f\}$

③ $\{b, f\}$

④ $\{h\}$

⑤ $\{b, h\}$

해설

$$A^c = \{b, f, g\}$$

$$B = \{b, f, h\}$$

$$A^c \cap B = \{b, f\}$$

13. 학생 수가 40 명인 희정이네 반 학생들은 교내 백일장에 참가하여 시를 써서 제출한 학생이 22 명, 시와 수필을 모두 써서 제출한 학생이 9 명, 시와 수필을 모두 제출하지 않은 학생이 13 명이었을 때, 수필을 써서 제출한 학생 수는?

① 10 명

② 11 명

③ 12 명

④ 13 명

⑤ 14 명

해설

$n(U) = 40, n(A) = 22, n(A \cap B) = 9, n((A \cup B)^c) = 13$ 이다.

$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 40 - 13 = 27$ 이다.

$n(B) = n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B) = 27 - 22 + 9 = 14$ 이다.

14. 실수 전체집합에 대하여 세 조건 p, q, r 이 아래와 같을 때 다음 중 참인 명제는?

$$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$$

① $p \rightarrow q$

② $p \rightarrow r$

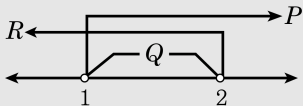
③ $q \rightarrow r$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$$



$$\therefore Q \subset P, Q \subset R \text{ 이므로 } q \rightarrow p, q \rightarrow r \text{ (참)}$$

15. 명제 「 $0 < x < 1$ 이면 $|x - a| < 1$ 이다.」가 참이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구할 때 정수의 개수는 ?

① 1개

② 2개

③ 0개

④ 3개

⑤ 5개

해설

$$|x - a| < 1 \text{ 에서 } -1 < x - a < 1$$

$$\therefore a - 1 < x < a + 1$$

$\{x \mid 0 < x < 1\} \subset \{x \mid a - 1 < x < a + 1\}$ 이어야 한다.

$$\therefore a - 1 \leq 0, a + 1 \geq 1 \text{ 에서 } 0 \leq a \leq 1$$

$$\therefore a = 0, 1$$

$\therefore$ 정수의 개수는 2개

16. 세 조건 p, q, r 에 대하여 q 는 p 의 필요조건, q 는 r 의 충분조건이고 r 는 p 의 충분조건이다. 이 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.



답:

조건



정답: 필요충분조건

해설

q 는 p 의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \dots\dots \textcircled{㉠}$

q 는 r 의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r \dots\dots \textcircled{㉡}$

r 는 p 의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p \dots\dots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로

$p \Rightarrow r \dots\dots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉤}$ 에서 $r \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ 이므로 $r \leftrightarrow p$ 이다.

$\therefore$ 필요충분조건

17. $a > 1$ 일 때, $a + \frac{4}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$a + \frac{4}{a-1} = a - 1 + \frac{4}{a-1} + 1$$

산술기하조건을 이용하면

$$a - 1 + \frac{4}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1) \times \frac{4}{a-1}} = 4$$

$\therefore$ 최솟값은 $4 + 1 = 5$

18. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f(f(f(x))) = x$ 가 되는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여

$$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$$

$$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$$

$$f(f(f(x))) = x \text{ 이므로 } 8x - 21 = x$$

$$\therefore x = 3$$

19. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2 + 3) = f(2) = 2 + 5 = 7$$

$$f^{-1}(2) = t \text{ 라 하면 } f(t) = 2$$

그런데 $x+5 \geq 5$ ($\because x \geq 0$) 이고

$$-x^2+3 < 3 \text{ ($\because x < 0$) } \text{ 이므로 } -t^2+3 = 2$$

$$\therefore t = f^{-1}(2) = -1 \text{ ($\because t < 0$)} \cdots \textcircled{7}$$

$$\text{따라서 } (f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$$

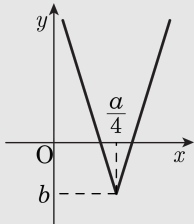
20. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4 \left(x - \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

21. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } n\text{미만의 자연수}\}$ 이고 집합 B 는 A 의 모든 부분집합을 원소로 하는 집합이다. 집합 B 의 부분집합의 개수가 256 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$2^k = 256 = 2^8 \quad \therefore k = 8$$

B 의 원소의 개수가 8 개 이므로, 집합 A 의 부분집합의 수는 8 개이다.

$$2^{(n\text{미만의 자연수 개수})} = 2^{n-1} = 8 = 2^3 \quad \therefore n = 4$$

22. 지윤이네 학교 학생 170 명 중 A 문제를 푼 학생이 80 명, B 문제를 푼 학생이 90 명, A 문제와 B 문제를 모두 푼 학생이 15 명일 때, A 문제와 B 문제 중 어느 것도 풀지 못한 학생은 몇 명인가?

① 10 명

② 12 명

③ 14 명

④ 15 명

⑤ 16 명

해설

전체집합을 U , A 문제를 푼 학생들의 집합을 A , B 문제를 푼 학생들의 집합을 B 라고 하면

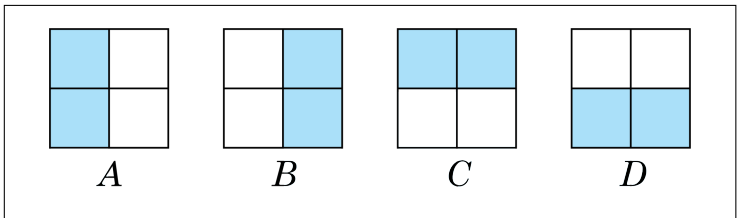
$$n(U) = 170$$

$$n(A) = 80, n(B) = 90, n(A \cap B) = 15$$

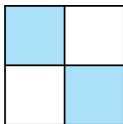
$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 80 + 90 - 15 \\ &= 155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 170 - 155 \\ &= 15 \end{aligned}$$

23. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



다음 그림을 위의 집합 A , B , C , D 와 연산 기호를 사용하여 옳게 표현한 것은?



① $(A \cup B) - (A \cap B)$

② $(D \cup C) - (B \cap C)$

③ $(A \cup D) - (A \cap D)$

④ $(A - C) \cup (C - B)$

⑤ $(A - D) \cup (B - A)$

해설

$(A \cup D) - (A \cap D)$

24. 두 집합 $A = \{5, 2a + 1, 11\}$, $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7\}$ 일 때, $B - A$ 는?

① $\{5, 7, 11\}$

② $\{3, 7, 13\}$

③ $\{5, 11\}$

④ $\{3, 13\}$

⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로 $7 \in A$, $7 \in B$ 이다.

$$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$$

$$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$$

$$B - A = \{3, 13\}$$

25. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

I. $1 + a > \sqrt{1 + 2a}$

II. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

III. $a + \frac{1}{a} \geq 2$

IV. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$

V. $(a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right) \geq 4$

VI. $(2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 25$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

I. $(1+a)^2 - (\sqrt{1+2a})^2$
 $= a^2 > 0 \quad (\because a > 0)$

$\therefore (1+a) > \sqrt{1+2a} \quad (\bigcirc)$

II. $(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
 $= 2(a+b) - (a+b+2\sqrt{ab})$
 $= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

$\therefore \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (\bigcirc)$

III. $a + \frac{1}{a} \geq 2 \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \quad (\bigcirc)$

IV. $\frac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \frac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
 $= \frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0$

$\therefore \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad (\bigcirc)$

V. $(a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right) = 4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$

$\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{2b}{a}} = 4$

$\therefore 4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 8 \quad (\times)$

VI. $(2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 17 + \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a}$

$\frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{8b}{a}} = 8$

$\therefore (2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 17 + \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} \geq 25 \quad (\bigcirc)$