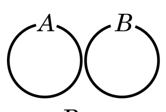
1. 10 보다 작은 소수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

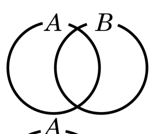
① $3 \notin A$ ② $7 \notin A$ ③ $9 \in A$ ④ $2 \in A$ ⑤ $4 \in A$

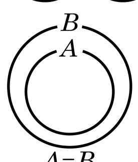
해설

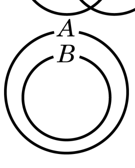
집합 A 의 원소는 2, 3, 5, 7 이므로
④ $2 \in A$ 이다.

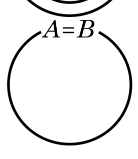
2. $A=\{x \mid x$는 10이하의 소수$\}$, $B=\{x \mid x$는 12이하의 홀수$\}$ 일 때, 두 집합 사이의 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

3. 다음 중 $A=\{x \mid x$는 2보다 크고 7보다 작은 자연수$\}$의 부분집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\varnothing$

② $\{x \mid x$는 6의 약수$\}$

③ $\{2\}$

④ $\{3,\ 5\}$

⑤ $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

해설

$A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이므로

$\varnothing \subset A$, $\{3,\ 5\} \subset A$

4. 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \left\{x \mid x\text{는 10 이하의 자연수}\right\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 32 개

해설

집합 X 는 원소 1, 3, 5, 7, 9를 반드시 포함하는 집합 B 의 부분집합이므로
개수는 $2^{10-5} = 2^5 = 32$ (개)

5. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3, \cdots, n\}$ 의 부분집합의 개수가 16 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$2^n = 16 \ \therefore n = 4$

6. 두 집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B = \{a,\ c,\ e,\ f\}$ 에 대하여 $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 8 개 ② 10 개 ③ 12 개 ④ 14개 ⑤ 16 개

해설

$\{a,\ c\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ 이므로
집합 X 는 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ 의 부분집합 중 $a,\ c$ 를 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^4 = 16$ (개) 이다.

7. $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{5,7\}$ 에 대하여 $X-A=\varnothing$, $(A-B)\cup X=X$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 없는 것은?

① $\{1,3,9\}$ ② $\{1,3,5,7\}$ ③ $\{1,3,5,9\}$

④ $\{1,3,7,9\}$ ⑤ $\{1,3,5,7,9\}$

해설

$(A-B)\subset X\subset A$ 이므로 $\{1,3,9\}\subset X\subset\{1,3,5,7,9\}$ 이다. 따라서 X 가 될 수 없는 집합은 $\{1,3,5,7\}$ 이다.

8. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100\}$의 두 부분집합 A, B를 $A = \{x \mid x$는 5의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 홀수$\}$라고 할 때, $n(A \cup B)$의 값은?

① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 70

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100\}$
$A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots,\ 100\}$
$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 99\}$ 이므로
$A \cap B = \{5,\ 15,\ 25,\ \cdots,\ 95\}$
따라서 $n(A) = 20,\ n(B) = 50,\ n(A \cap B) = 10$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 20 + 50 - 10 = 60 \end{aligned}$$

9. 명제「$p \to \sim q$」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \to q$　　② $q \to p$　　③ $\sim p \to q$
④ $q \to \sim p$　　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「$q \to \sim p$」도 참이다.

10. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x + 1$　　㉡ $g(x) = x^2$

㉢ $h(x) = -x$　　㉣ $k(x) = |x|$

① 4 개　② 3 개　③ 2 개　④ 1 개　⑤ 없다

해설

이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)
㉠은 증가만 하는 일대일 대응.
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.
답은 2 개

11. 다음 다섯 개의 명제 중 참인 명제의 개수는? (단, a, b, c는 실수)

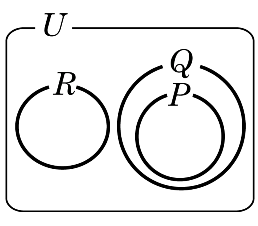
> ㉠ $|a|+|b|=0 \leftrightarrow ab=0$
>
> ㉡ $a<b$ 이면 $ac<bc$ 이다.
>
> ㉢ $a<b$ 이면 $a^2<b^2$ 이다.
>
> ㉣ $a+b\sqrt{3}=0$ 이면 $a=0$ 그리고 $b=0$
>
> ㉤ $a<b$ 이면 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $|a|+|b|=0 \leftrightarrow a=b=0 \nleftrightarrow ab=0$
㉡ $c \leq 0$ 인 경우 성립하지 않는다.
㉢ 반례 : $a=-1, b=0$
㉣ 반례 : $a=\sqrt{3}, b=-1$ (a, b 가 유리수일 때 명제가 성립한다.)
㉤ 반례 : $a=-1, b=1$ (a, b 가 같은 부호일 때 성립한다.)

12. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 이들 사이의 포함 관계는 다음 그림과 같다. 다음 명제 중 거짓인 것은?



① $r \to \sim q$　② $r \to \sim p$　③ $p \to \sim r$

④ $\sim q \to \sim p$　⑤ $p \to \sim q$

해설

명제의 참, 거짓은 각각의 조건을 만족하는 집합의 포함 관계로 판별할 수 있다.

① $R \subset Q^c$ 이므로 $r \to \sim q$ 는 참이다.

② $R \subset P^c$ 이므로 $r \to \sim p$ 는 참이다.

③ $P \subset R^c$ 이므로 $p \to \sim r$ 는 참이다.

④ $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \to \sim p$ 는 참이다.

⑤ $P \not\subset Q^c$ 이므로 $p \to \sim q$ 는 거짓이다.

13. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 8 가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

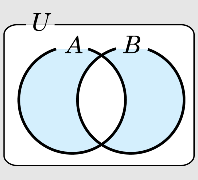
$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

14. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 ?

① $A = B$ ② $B \subset A$ ③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$ ⑤ $A \cap B = B$

해설



$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= B \cap A^c \\ &= B - A\end{aligned}$$

$\therefore\ A - B = \phi$

그러므로 $A \subset B$

해설

$(A-B) \cup (B-A) = B-A$ 에서$(A-B)$와$(B-A)$ 는 서로소이므로 등식이 성립하려면 $A-B = \varnothing$ 가 되어야 한다. $A-B = \varnothing \leftrightarrow A \subset B$

15. 실수 x에 대하여 $|x-1|<a$ 가 $-2<x<6$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$|x-1|<a \rightarrow -a+1<x<a+1$, $-a+1<x<a+1$이 $-2<x<6$ 범위 안에 포함되어야 한다.

$-2 \leq -a+1 \rightarrow a \leq 3$, $a+1 \leq 6 \rightarrow a \leq 5$ $\therefore$ $a \leq 3$

16. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2+2x-3$이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$의 양변에
$x = -1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

17. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \to B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

18. 두 함수 $f(x)=x^2-5$, $g(x)=\begin{cases} 2x\ (x \ge 0) \\ x^2\ (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $(g \circ f)(2)+(g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(2)+(g \circ f)(3) &= g(f(2))+g(f(3)) \\ &= g(-1)+g(4) \\ &= (-1)^2+2\times 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

19. 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right)=x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$\frac{x+1}{5}=t$ 로 놓으면 $x=5t-1$

$f(t)=(5t-1)+2=5t+1$ 에서

$f(x)=5x+1$

$\therefore\ f(f(x))=f(5x+1)=5(5x+1)+1$

$=25x+6$

$\therefore\ f(f(10))=25\cdot10+6=256$

20. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5)$

$= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$= (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$= f^{-1} \circ (f^{-1}(5))$

$f^{-1}(5) = k$ 로 놓으면 $f(k) = -2k + 3 = 5$

$\therefore k = -1$

$\therefore$ (준식) $= f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1)$

$f^{-1}(-1) = l$ 로 놓으면

$f(l) = -2l + 3 = -1$

$\therefore\ l = 2$

$\therefore$ (준식) $= f^{-1}(-1) = l = 2$

21. 세 집합 A, B, C 에 대하여
$n(A) = 40, n(B) = 24$, $n(C) = 16$, $n(A \cup B) = 50$, $n(B \cap C) = 10$, $A \cap C = \varnothing$ 일 때,
$n(A \cup B \cup C) + 2 \times n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
$A \cap C = \varnothing$ 이므로 $A \cap B \cap C = \varnothing$ 이 된다.
$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$ 이고
$A \cap B \cap C = \varnothing$ 이므로 $n(A \cap B) = 40 + 24 - 50 = 14$
$\therefore n(A \cup B \cup C) = 40 + 24 + 16 - 14 - 10 - 0 + 0 = 56$
따라서 정답은 $56 + 2 \times 0 = 56$

22. 집합 $A = \left\{x | x \text{는 15미만의 소수}\right\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 2$ 이고 $B - A = \varnothing$ 인 집합 B 의 개수로 알맞은 것은?

① 3 개 ② 6 개 ③ 9 개 ④ 12 개 ⑤ 15 개

해설

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$, $B - A = \varnothing$ 이면 $B \subset A$ $\quad \therefore A \cap B = B$

$n(B) = n(A \cap B) = 2$

$\therefore$ 집합 B 는 원소의 개수가 2 개인 집합A 의 부분집합이므로

$\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{2,7\}$, $\{2,11\}$, $\{2,13\}$, $\{3,5\}$, $\{3,7\}$, $\{3,11\}$, $\{3,13\}$, $\{5,7\}$, $\{5,11\}$, $\{5,13\}$, $\{7,11\}$, $\{7,13\}$, $\{11,13\}$

따라서 $5+4+3+2+1 = 15$(개) 이다.

23. 다음은 “실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다”는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면
b^2-ac (가) 0 , c^2-ab (가) 0 , a^2-bc (가) 0
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ (나) 0
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ (나) $0\cdots$ ㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$(다)$0\cdots$ ㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

① $<,\ <,\ \geq$ ② $<,\ <,\ >$ ③ $<,\ >,\ <$
④ $\geq,\ \geq,\ \leq$ ⑤ $\geq,\ \leq,\ \geq$

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면
$b^2-ac<0,\ c^2-ab<0,\ a^2-bc<0$ (가정)
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac<0$
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}<0\cdots$ ㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0\cdots$ ㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

24. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x-2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는$a > 0$

② $-1 \le a \le 1$

③ $-2 < a < 2$

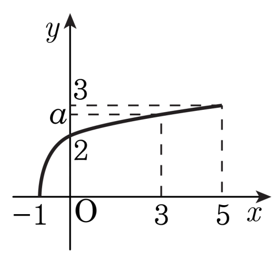
④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

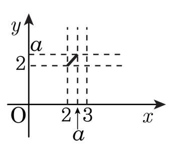
⑤ $a \ge 1$

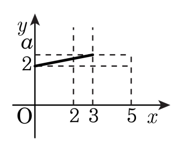
해설

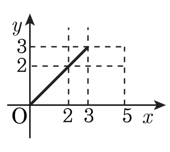
(i) $x \ge 2$ 일 때$f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$
(ii) $x < 2$ 일 때$f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$
함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로
$a < -1$ 또는 $a > 1$

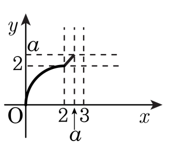
25. 실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프는?

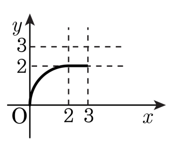


①


②


③


④


⑤


해설

실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 이므로 $(f \circ f)(x)$ 함수는 $f(f(x))$ 에서 $f(x)$ 의 치역을 정의역으로 하는 함수이다.
따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는
$y = f(x)$ $(0 \le x \le 3)$ 가 되고 치역은 $2 \le y \le a$ 이다.