1. 집합 $A = \{a, \{b, c\}, c\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\{a, b, c\} \subset A$ ② $\{b, c\} \subset A$ ③ $\{a, c\} \in A$

④ $\{\{b, c\}, c\} \in A$ ⑤ $\varnothing \subset A$

해설

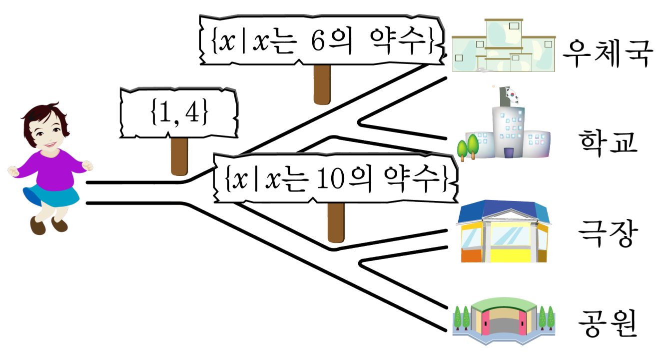
① $\{a\{b, c\}\} \subset A$

② $\{b, c\} \in A$

③ $\{a, c\} \subset A$

④ $\{\{b, c\}c\} \subset A$

2. 미선이는 길을 가다가 갈림길을 만났을 때, 갈림길의 이정표에 적힌 집합이 집합 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 의 진부분집합이면 왼쪽으로 가고, 집합 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 의 진부분집합이 아니면 오른쪽으로 간다고 한다. 미선이가 도착하는 곳은 어디인지 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 학교

해설

$\{1,\ 2,\ 4\}$ 의 진부분집합은 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 4\}$ 이다.
$\{1,\ 4\}$ 는 진부분집합이므로 첫 번째 갈림길에서 왼쪽으로 가고, $\{x \mid x\text{는 }6\text{의 약수}\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ 이므로 두 번째 갈림길에서 오른쪽으로 간다.
따라서 미선이가 도착하는 곳은 학교이다.

3. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 부분집합의 개수는?

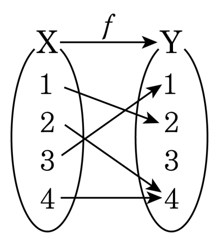
① 5 개 ② 10 개 ③ 15 개 ④ 20 개 ⑤ 25 개

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$,
$\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 5\}$,
$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 5\}$,
$\{4,\ 5\}$
따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는
$4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (개) 이다.

4. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ 함수가 아니다. ㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다. ㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다. ㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다. ㉤ 일대일대응이다.



① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 $1, 2, 3, 4$ 이다.
㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $\mathrm{Y} \neq f(x)$ 이므로 일대일대응이 아니다.

5. 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여 $(f\circ g)(x)$를 구하면?

① $(f\circ g)(x)=(x+2)^2$
② $(f\circ g)(x)=x^2+2$
③ $(f\circ g)(x)=(x-2)^2$
④ $(f\circ g)(x)=x^2-2$
⑤ $(f\circ g)(x)=-x^2+2$

해설

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$

6. 분수식 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{x}$

해설

(준 식) $= 1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}} = 1+\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x}$

7. $x : y : z = 3 : 4 : 5$일 때, $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{50}{47}$ ② $\dfrac{47}{50}$ ③ $\dfrac{49}{50}$ ④ $\dfrac{24}{25}$ ⑤ $\dfrac{26}{25}$

해설

$x : y : z = 3 : 4 : 5 \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5} = k(\neq 0)$

$\therefore\ x = 3k\ ,\ y = 4k\ ,\ z = 5k$

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{3k \cdot 4k + 4k \cdot 5k + 5k \cdot 3k}{(3k)^2 + (4k)^2 + (5k)^2}$

$= \dfrac{47k^2}{50k^2} = \dfrac{47}{50}$

8. 함수 $y=\frac{1-2x}{x-2}$ 의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동 시킨 것이다. 여기서 $k+a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y=\frac{-2x+1}{x-2}=\frac{-2(x-2)-3}{x-2}=\frac{-3}{x-2}-2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{-3}{x}$ 의

그래프를 x축의 방향으로 2만큼,

y축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이므로

$k=-3,\ a=2,\ b=-2$

$\therefore\ k+a+b=-3+2-2=-3$

9. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 각각 공집합이 아닐 때, 항상 서로소인 두 집합끼리 짝지은 것은?

① A와 $A \cap B$
② $A - B$와 $A \cup B$
③ $A \cap B$와 $A \cup B$
④ $A^c \cap B$와 B
⑤ $A \cup B^c$와 $B - A$

해설

$B^c \cup A$은 $(B - A)^c$을 나타내는 것과 같으므로, 서로소인 집합이 된다.

10. 다음 ( )에 「필요, 충분, 필요충분」 중에서 알맞은 것을 차례대로 써 넣어라.

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 ( )조건이다 평행사변형은 직사각형이기 위한 ( )조건이다.

▶ 답 : 조건

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 충분 조건이다. 평행사변형은 직사각형이기 위한 필요 조건이다.

11. x, y가 실수일 때, $|x|+|y|=|x+y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy=0$　② $xy>0$　③ $xy\ge 0$
④ $xy<0$　⑤ $xy\le 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2+y^2+2|xy|=x^2+y^2+2xy$
$\therefore$ $|xy|=xy$ 가 성립하려면 $xy\ge 0$ 일 때이다.

12. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A=B$ ② $B\subset A$ ③ $A\subset B$
④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A^C=B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

13. 다음은 $a,\ b,\ c$가 실수일 때 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

> $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
> $([\text{가}])\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}([\text{나}])0$
> $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$ 일
> $a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
> 때 성립)

① $\frac{1}{2},\ >$ ② $\frac{1}{2},\ \geq$ ③ $2,\ >$ ④ $2,\ \geq$ ⑤ $2,\ =$

해설

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
두식의차를변형하면
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$
$\because a, b, c$ 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0,$
$(b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때
$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
성립)

14. 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

① $\dfrac{7}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $-\dfrac{7}{2}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}$

해설

$f(h(x)) = \dfrac{h(x)-1}{h(x)+2} = \dfrac{x+1}{x-1} = g(x)$

$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$

$2h(x) = -3x-1$

$\therefore\ h(x) = \dfrac{-3x-1}{2}$

$\therefore\ h(2) = -\dfrac{7}{2}$

해설

$f(h(2)) = g(2)$ 에서, $h(2) = a$ 라 두면, $g(2) = 3$ 이므로

$f(a) = 3$, $\dfrac{a-1}{a+2} = 3$

이를 풀면 $\therefore\ a = h(2) = -\dfrac{7}{2}$

15. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$\therefore\ f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

16. 등식 $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ 이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -25

해설

$x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로
양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$을 곱하면
$x^2+1 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$
양변에 $x=1$을 대입하면 $2=2a$
$\therefore\ a=1$
양변에 $x=2$를 대입하면 $5=-b$
$\therefore\ b=-5$
양변에 $x=3$을 대입하면 $10=2c$
$\therefore\ c=5$
$\therefore\ abc=-25$

17. $x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 - y^3 - 3(x-y)$ 의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{2}$　　③ $3\sqrt{2}$　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$y = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ x - y = \sqrt{2},\ xy = 1$

$x^3 - y^3 - 3(x-y)$

$= (x-y)^3 + 3xy(x-y) - 3(x-y)$

$= (\sqrt{2})^3 + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

18. 집합 $A = \{(a,\ b) \mid a \times b = 9,\ a,\ b$는 자연수$\}$ 일 때, 집합 $n(A)$ 를 바르게 구한 것은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1 = 9$ 이므로 원소나열법으로 나타내면
$A = \{(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)\}$ 이다.
$\therefore\ n(A) = 3$

19. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$　　② $q \Rightarrow r$　　③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$　　⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore\ r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

20. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$의 값을 구하면?

① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

자연수 n에 대하여

$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

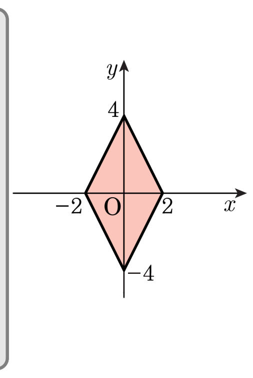
21. 함수 $2|x|+|y|=4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$2|x|+|y|=4$ 의 그래프는 $2x+y=4$,
즉 $y=-2x+4$ 의 그래프에서
$x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 16$

22. 다항함수 $f(x)=\dfrac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x-b}{(b-c)(b-a)}$

$+\dfrac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$의 값은?

① $a+b+c$ ② $a^2+b^2+c^2$ ③ $a^3+b^3+c^3$

④ $ab+bc+ca$ ⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면

(분자)

$=\{(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\}$

$=(b-c+c-a+a-b)x$

$+(-ab+ac-bc+ab-ca+cb)=0$

$\therefore\ f(x)=0 \quad \therefore\ f(2013)=0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로

$a,\ b,\ c$는 서로 다른 수이고

$f(a)=\dfrac{a-b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-c}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{-1}{b-c}+\dfrac{1}{b-c}=0$

$f(b)=\dfrac{b-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b-c}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{-1}{a-c}+\dfrac{1}{a-c}=0$

그런데 $f(x)$는 일차이하의 함수이고

$f(a)=f(b)=0$이므로

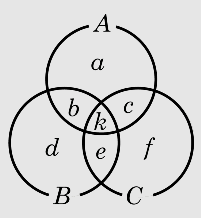
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이다.

$\therefore\ f(2013)=0$

23. 집합 X, Y 에 대하여 연산 ★ 를 $X★Y=(X\cup Y)-(X\cap Y)$ 로 정의하고, 세 집합 A, B, C 가 $n(A\cup B\cup C)=45$, $n(A★B)=18$, $n(B★C)=22$, $n(C★A)=24$ 를 만족할 때, $n(A\cap B\cap C)$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설



$n(A\cap B\cap C)=k$

$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+d+e+f+k$

$=45 \cdots$ ㉠

$n(A★B)=a+c+d+e=18 \cdots$ ㉡

$n(B★C)=b+d+c+f=22 \cdots$ ㉢

$n(C★A)=a+b+e+f=24 \cdots$ ㉣

㉡ + ㉢ + ㉣ $=2(a+b+c+d+e+f)=64$

$\therefore\ a+b+c+d+e+f=32 \cdots$ ㉤

㉤을 ㉠에 대입하면 $\therefore\ k=13$

24. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$의 두 부분집합 $A,\ B$가 $A\cup B=U,\ A\cap B=\{3,\ 8\}$을 만족한다. $A,\ B$의 원소의 합을 $N(A),\ N(B)$라고 할 때, $N(A)\times N(B)$의 최댓값은?

① 11^2　② 22^2　③ 23^2　④ 33^2　⑤ 44^2

해설

$N(A)+N(B)=N(U)+N(A\cap B)$
$=(1+2+3+\cdots+9+10)+(3+8)=66$

$$\begin{aligned}\mathrm{N(A)}\times\mathrm{N(B)}&=\mathrm{N(A)}\cdot\{66-\mathrm{N(A)}\}\\&=-\mathrm{N(A)}^2+66\mathrm{N(A)}\\&=-(\mathrm{N(A)}-33)^2+33^2\end{aligned}$$

$\therefore\ N(A)=33$일때, 최댓값 33^2

해설

$N(A)+N(B)=(1+2+\cdots+10)+(3+8)=66$
$N(A)>0, N(B)>0$ 이므로
산술·기하 평균을 이용하면
$\dfrac{N(A)+N(B)}{2}\ \geq\ \sqrt{N(A)\cdot N(B)}$ (단, 등호는 $N(A)=N(B)$ 일 때)
$\therefore\ \mathrm{N(A)}\cdot\mathrm{N(B)}\leq 33^2$
따라서 $N(A)+N(B)$의 최댓값은 33^2이다.

25. 0이 아닌 세 수 $x,\ y,\ z$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하시오.

㉠ x, y, z 중 적어도 하나는 6이다.

㉡ x, y, z의 각각의 역수의 합은 $\frac{1}{6}$이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

㉠ 에서 $(x-6)(y-6)(z-6)=0 \cdots$ ①

㉡ 에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore 6(xy+yz+zx)=xyz$

①에서 $xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0$

$\therefore 36(x+y+z)=216$

따라서, $2(x+y+z)=12$