

1. 집합 $A = \{a, \{b, c\}, c\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\{a, b, c\} \subset A$

② $\{b, c\} \subset A$

③ $\{a, c\} \in A$

④ $\{\{b, c\}, c\} \in A$

⑤ $\emptyset \subset A$

해설

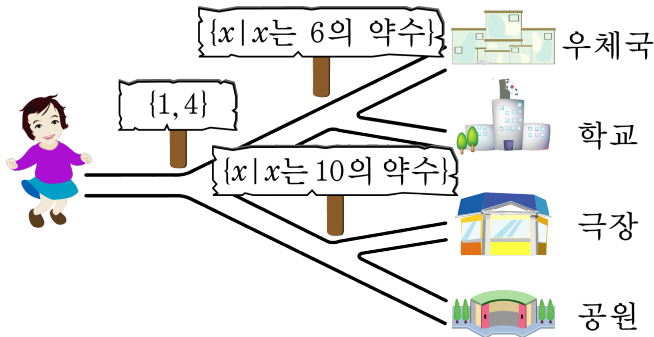
① $\{a\{b, c\}\} \subset A$

② $\{b, c\} \in A$

③ $\{a, c\} \subset A$

④ $\{\{b, c\}c\} \subset A$

2. 미션이는 길을 가다가 갈림길을 만났을 때, 갈림길의 이정표에 적힌 집합이 집합 $\{1, 2, 4\}$ 의 진부분집합이면 왼쪽으로 가고, 집합 $\{1, 2, 4\}$ 의 진부분집합이 아니면 오른쪽으로 간다고 한다. 미션이가 도착하는 곳은 어디인지 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 학교

해설

$\{1, 2, 4\}$ 의 진부분집합은 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$ 이다.

$\{1, 4\}$ 는 진부분집합이므로 첫 번째 갈림길에서 왼쪽으로 가고, $\{x | x \text{는 } 6 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 두 번째 갈림길에서 오른쪽으로 간다.

따라서 미션이가 도착하는 곳은 학교이다.

3. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 부분집합의 개수는?

① 5 개

② 10 개

③ 15 개

④ 20 개

⑤ 25 개

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\},$

$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\},$

$\{3, 4\}, \{3, 5\},$

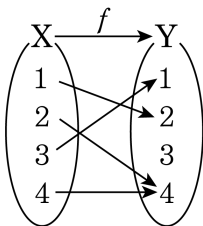
$\{4, 5\}$

따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는

$4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (개) 이다.

4. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ 함수가 아니다.
- ㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다.
- ㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다.
- ㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다.
- ㉤ 일대일대응이다.



① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

- ㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
- ㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 1, 2, 3, 4이다.
- ㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
- ㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $Y \neq f(X)$ 이므로 일대일대응이 아니다.

5. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$

② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$

④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$$

6. 분수식 $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{x}$

해설

$$(\text{준 식}) = 1 - \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

7. $x : y : z = 3 : 4 : 5$ 일 때, $\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{50}{47}$

② $\frac{47}{50}$

③ $\frac{49}{50}$

④ $\frac{24}{25}$

⑤ $\frac{26}{25}$

해설

$$x : y : z = 3 : 4 : 5 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k (k \neq 0)$$

$$\therefore x = 3k, y = 4k, z = 5k$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \frac{3k \cdot 4k + 4k \cdot 5k + 5k \cdot 3k}{(3k)^2 + (4k)^2 + (5k)^2} \\ &= \frac{47k^2}{50k^2} = \frac{47}{50}\end{aligned}$$

8. 함수 $y = \frac{1-2x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 시킨 것이다. 여기서 $k+a+b$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$y = \frac{-2x+1}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2} = \frac{-3}{x-2} - 2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{-3}{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이므로

$$k = -3, a = 2, b = -2$$

$$\therefore k + a + b = -3 + 2 - 2 = -3$$

9. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 각각 공집합이 아닐 때, 항상 서로 소인 두 집합끼리 짝지은 것은?

① A 와 $A \cap B$

② $A - B$ 와 $A \cup B$

③ $A \cap B$ 와 $A \cup B$

④ $A^c \cap B$ 와 B

⑤ $A \cup B^c$ 와 $B - A$

해설

$B^c \cup A$ 은 $(B - A)^c$ 을 나타내는 것과 같으므로, 서로소인 집합이 된다.

11. x, y 가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$ 가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$

⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore |xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

12. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A = B$

② $B \subset A$

③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A^c = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.

그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.

따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

13. 다음은 a, b, c 가 실수일 때 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 를 증명한 것이다. [가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$$

$$([가]) (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} ([나]) 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0 \quad (\text{단, 등호는 } a = b = 0 \text{ 일}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca)$$

때 성립)

- ① $\frac{1}{2}, >$ ② $\frac{1}{2}, \geq$ ③ $2, >$ ④ $2, \geq$ ⑤ $2, =$

해설

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$$

두식의차를변형하면

$$\frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

$\therefore a, b, c$ 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0,$

$$(b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0 \quad (\text{단, 등호는 } a = b = c \text{ 일 때}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca)$$

성립)

14. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

① $\frac{7}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $-\frac{7}{2}$

⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x - 1$$

$$\therefore h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

해설

$f(h(2)) = g(2)$ 에서, $h(2) = a$ 라 두면, $g(2) = 3$ 이므로

$$f(a) = 3, \quad \frac{a-1}{a+2} = 3$$

$$\text{이를 풀면 } \therefore a = h(2) = -\frac{7}{2}$$

15. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 3, g^{-1}(1) = 4$ 일 때, $f^{-1}(3) + g(4)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} f(2) = 3 \text{ 에서 } f^{-1}(3) &= 2 \text{ 이고} \\ g^{-1}(1) = 4 \text{ 에서 } g(4) &= 1 \text{ 이므로} \\ \therefore f^{-1}(3) + g(4) &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

16. 등식 $\frac{x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로

양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 곱하면

$$x^2 + 1 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $2 = 2a$

$$\therefore a = 1$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면 $5 = -b$

$$\therefore b = -5$$

양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $10 = 2c$

$$\therefore c = 5$$

$$\therefore abc = -25$$

17. $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $y = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 - y^3 - 3(x - y)$ 의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} \\&= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$y = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x - y = \sqrt{2}, \quad xy = 1$$

$$\begin{aligned}&x^3 - y^3 - 3(x - y) \\&= (x - y)^3 + 3xy(x - y) - 3(x - y) \\&= (\sqrt{2})^3 + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

18. 집합 $A = \{(a, b) \mid a \times b = 9, a, b \text{는 자연수}\}$ 일 때, 집합 $n(A)$ 를
바르게 구한 것은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1 = 9$ 이므로 원소나열법으로 나타내면
 $A = \{(1, 9), (3, 3), (9, 1)\}$ 이다.

$$\therefore n(A) = 3$$

19. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q, r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$

② $q \Rightarrow r$

③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$

⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$ 가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

20. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{ 일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{ 일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$ 의 값을 구하면?

① 80

② 85

③ 95

④ 99

⑤ 102

해설

자연수 n 에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{ 일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{ 일 때}) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

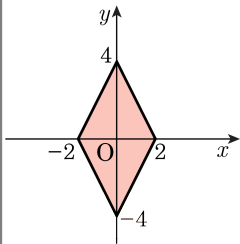
21. 함수 $2|x| + |y| = 4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 16

해설

$2|x| + |y| = 4$ 의 그래프는 $2x + y = 4$,
즉 $y = -2x + 4$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각
각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 $8 \times 4 \times \frac{1}{2} =$
16



22. 다항함수 $f(x) = \frac{x-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x-b}{(b-c)(b-a)}$
 $+ \frac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?

① $a + b + c$

② $a^2 + b^2 + c^2$

③ $a^3 + b^3 + c^3$

④ $ab + bc + ca$

⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면

(분자)

$$= \{(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b)\}$$

$$= (b-c + c-a + a-b)x$$

$$+ (-ab + ac - bc + ab - ca + cb) = 0$$

$$\therefore f(x) = 0 \quad \therefore f(2013) = 0$$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로

a, b, c 는 서로 다른 수이고

$$f(a) = \frac{a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{-1}{b-c} + \frac{1}{b-c} = 0$$

$$f(b) = \frac{b-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{-1}{a-c} + \frac{1}{a-c} = 0$$

그런데 $f(x)$ 는 일차이하의 함수이고

$$f(a) = f(b) = 0 \text{이므로}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.

$$\therefore f(2013) = 0$$

23. 집합 X, Y 에 대하여 연산 $\star$ 를 $X\star Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 로 정의하고, 세 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 45$, $n(A\star B) = 18$, $n(B\star C) = 22$, $n(C\star A) = 24$ 를 만족할 때, $n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하면?

① 10

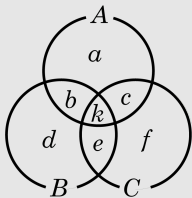
② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설



$$n(A \cap B \cap C) = k$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= a + b + c + d + e + f + k \\ &= 45 \dots \textcircled{\text{㉠}} \end{aligned}$$

$$n(A\star B) = a + c + d + e = 18 \dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$n(B\star C) = b + d + c + f = 22 \dots \textcircled{\text{㉢}}$$

$$n(C\star A) = a + b + e + f = 24 \dots \textcircled{\text{㉣}}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} + \textcircled{\text{㉢}} + \textcircled{\text{㉣}} = 2(a + b + c + d + e + f) = 64$$

$$\therefore a + b + c + d + e + f = 32 \dots \textcircled{\text{㉤}}$$

$$\textcircled{\text{㉤}} \text{을 } \textcircled{\text{㉠}} \text{에 대입하면 } \therefore k = 13$$

24. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cup B = U$, $A \cap B = \{3, 8\}$ 을 만족한다. A, B 의 원소의 합을 $N(A), N(B)$ 라고 할 때, $N(A) \times N(B)$ 의 최댓값은?

① 11^2

② 22^2

③ 23^2

④ 33^2

⑤ 44^2

해설

$$\begin{aligned} N(A) + N(B) &= N(U) + N(A \cap B) \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10) + (3 + 8) = 66 \\ N(A) \times N(B) &= N(A) \cdot \{66 - N(A)\} \\ &= -N(A)^2 + 66N(A) \\ &= -(N(A) - 33)^2 + 33^2 \\ \therefore N(A) &= 33 \text{ 일때, 최댓값 } 33^2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} N(A) + N(B) &= (1 + 2 + \cdots + 10) + (3 + 8) = 66 \\ N(A) > 0, N(B) > 0 \text{ 이므로} \\ \text{산술·기하 평균을 이용하면} \\ \frac{N(A) + N(B)}{2} &\geq \sqrt{N(A) \cdot N(B)} \quad (\text{단, 등호는 } N(A) = N(B) \text{ 일} \\ &\text{때}) \\ \therefore N(A) \cdot N(B) &\leq 33^2 \\ \text{따라서 } N(A) + N(B) \text{의 최댓값은 } 33^2 \text{이다.} \end{aligned}$$

25. 0이 아닌 세 수 x, y, z 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $2(x+y+z)$ 의 값을 구하시오.

㉠ x, y, z 중 적어도 하나는 6이다.

㉡ x, y, z 의 각각의 역수의 합은 $\frac{1}{6}$ 이다.

▶ 답 :

▶ 정답 : 12

해설

㉠에서 $(x-6)(y-6)(z-6) = 0 \cdots \textcircled{1}$

㉡에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$ 이므로

$$\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 6(xy + yz + zx) = xyz$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } xyz - 6(xy + yz + zx) + 36(x + y + z) - 216 = 0$$

$$\therefore 36(x + y + z) = 216$$

$$\text{따라서, } 2(x + y + z) = 12$$