1. 함수 $f(x)=[x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

ㄱ $f(x)=-1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.

ㄴ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \le x < n+1\}$ 의 원소의 개수는n 개이다.

ㄷ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \le x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $x \ge 0$ 이면 $[x] \ge 0$ 이므로 $x[x] \ge 0$

$x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$

그러므로 모든 x 에 대하여 $f(x)=[x[x]]$ 이므로

$f(x)=-1$ 은 존재하지 않는다. (참)

ㄴ 자연수 n 에 대하여 $n \le x < n+1$ 이면 $[x]=n$ 이므로

$f(x)=[nx]$

$n^2 \le nx < n^2+n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로

$f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2,\ n^2+1,\ \cdots,\ n^2+(n-1)$ 로서

모두 n 개이다. (참)

ㄷ 자연수 n 에 대하여 $-n \le x < n+1$ 이면 $[x]=-n$ 이므로

각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x)=[-nx]$ 이고 $n^2-n < -nx \le n^2$

따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는

$n^2-n, (n^2-n)+1, \cdots, (n^2-n)+(n-1), (n^2-n)+n$

로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)

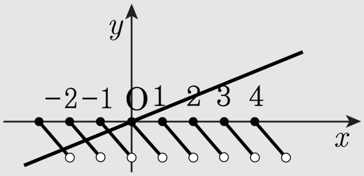
2. 함수 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \le x < -2$ 일 때, $[x] = -3$ 이므로
$y = [x] - x = -3 - x$
$-2 \le x < -1$ 일 때, $[x] = -2$ 이므로
$y = [x] - x = -2 - x$
$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로
$y = [x] - x = -1 - x$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로
$y = [x] - x = -x$
$1 \le 2x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로
$y = [x] - x = 1 - x$

따라서 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4개이고
만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.

i) $-3 \le x < -2$ 일 때, $-3 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$

ii) $-2 \le x < -1$ 일 때, $-2 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$

iii) $-1 \le x < 0$ 일 때, $-1 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$

iv) $0 \le x < 1$ 일 때, $-x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = 0$

$\therefore \ a = 4 \ , \ b = \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}$

$\therefore a + b = 4 + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

3. 방정식 $|x|+|y|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 함수 $y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 의 그래프에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 이 때, 작은 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ 3

해설

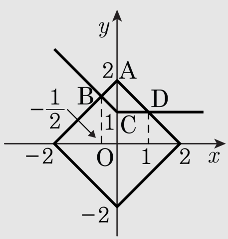
$y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x|=x$ 이므로

$$y=\frac{1}{2}(x-x)+1=1$$

(ii) $x<0$ 일 때, $|x|=-x$ 이므로

$$y=\frac{1}{2}(-x-x)+1=-x+1$$



따라서 $y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 과 $|x|+|y|=2$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.
그러므로 구하는 작은 사각형 ABCD 의 넓이는

$$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{4}$$

4. $|y-x|+|y+x|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 ?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

절댓값의 정의에 의하여

(i) $y-x \geq 0,\ y+x \geq 0$ 일 때,

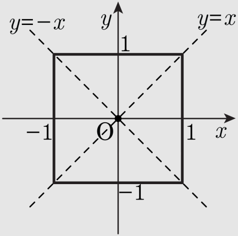
$y-x+y+x=2$

$\therefore\ y=1$

(ii) $y-x \geq 0,\ y+x < 0$ 일 때,

$y-x-y-x=2$

$\therefore\ x=-1$



(iii) $y-x<0,\ y+x \geq 0$ 일 때, $-y+x+y+x=2$

$\therefore\ x=1$

(iv) $y-x<0,\ y+x<0$ 일 때, $-y+x-y-x=2$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ S=2\times 2=4$

5. 함수 $y = ||x| - |x-2||$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M+m$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

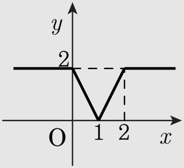
$y = ||x| - |x-2||$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |-x + x - 2| = 2$

(ii) $0 \le x < 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |x + x - 2| = 2|x-1|$

(iii) $x \ge 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = x-2$ 이므로 $y = |x - x + 2| = 2$

(i), (ii), (iii) 로부터 $y = ||x| - |x-2||$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 최댓값은 2 , 최솟값은 0 이므로 $M = 2$, $m = 0$ $\therefore$ $M + m = 2$

6. 수직선 위에 네 점 A (-2), B (0), C (1) 이 있다. 이 수직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 P 의 좌표를 P (x) 라고 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=|x+2|$, $\overline{\mathrm{PB}}=|x|$, $\overline{\mathrm{PC}}=|x-1|$,

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x|+|x-1|$ 이므로

$y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 로 놓고

$x=-2,\ 0,\ 1$ 을 경계로 하여 구간을 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=\begin{cases}-3x-1 & (x<-2\text{일 때})\\ -x+3 & (-2\le x<0\text{일 때})\\ x+3 & (0\le x<1\text{일 때})\\ 3x+1 & (x\ge 1\text{일 때})\end{cases}$$

따라서, $y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 3 이다.