

1. 다음에서 집합인 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ 귀여운 새들의 모임
- ㉡ 우리나라 중학생의 모임
- ㉢ 작은 수의 모임
- ㉣ 삼각형의 모임
- ㉤ 우리 반에서 수학을 잘 하는 학생의 모임

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합이란 특정한 조건에 맞는 원소들의 모임이다. 따라서 집합인 것은 우리나라 중학생의 모임과 삼각형의 모임이다. 따라서 2 개이다.

2. 다음 집합 중에서 조건제시법을 원소나열법으로, 원소나열법을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은? (정답 2개)

① $A = \{x \mid x \text{는 홀수}\} = \{1, 3, 6, \dots\}$

② $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } 30 \text{보다 작은 소수}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots, 23, 29\}$

④ $\{3, 6, 9, 12\} = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, \dots, 99\} = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 홀수}\}$

해설

① $\{1, 3, 5, \dots\}$

② $\{1, 2, 5, 10\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2x^2 - 3x - 2 = 0\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 집합 B 의 부분집합 중 A 와 서로소인 집합 X 의 개수는?

- ① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 15개 ⑤ 16개

해설

$$2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1), A = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$$

(A 와 서로소인 집합 X) = (2를 원소로 갖지 않는 A 의 부분집합)

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

4. 두 집합 $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 집합 X 는 집합 B 에 포함되고 집합 A 는 집합 X 에 포함될 때, 이를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 원소 a, c 를 모두 포함하는 집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

5. 두 집합 $A = \{6, 9, 4\}$, $B = \{x-3, x-1, x+2\}$ 가 서로 같을 때, x 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$x-3, x-1, x+2$ 의 크기를 비교해 보면 $x-3 < x-1 < x+2$ 이므로
 $A = B$ 이려면 $x-3 = 4, x-1 = 6, x+2 = 9$ 가 되어야 한다.
따라서 $x = 7$ 이다.

6. $A = \{5, 9, 12, 14\}$, $B = \{3, 5, a, a + 3\}$ 이고 $A \cap B = \{5, 9\}$ 일 때 집합 B 의 원소의 합은?

- ① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

$A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로 $a = 9$ 이거나 $a + 3 = 9$ 이어야한다.
i) $a = 9$ 일 때
 $B = \{3, 5, 9, 12\}$, 교집합의 원소 중 12는 존재하지 않으므로 성립하지 않는다.
ii) $a + 3 = 9$ 즉, $a = 6$ 일 때
 $B = \{3, 5, 6, 9\}$
따라서 원소들의 합은 23이다.

7. 임의의 집합 A, B, C 에 대하여, 다음 중에서 $A - (B - C)$ 와 같은 집합은 ?

① $(A \cup B) - (A \cup C)$

② $(A - B) - (A - C)$

③ $(A \cap B) \cup (A - C)$

④ $(A - B) \cup (A \cap C)$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap C)$

해설

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ &= (A - B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A * B = (A \cup B)^c$ 으로 정의할 때, 다음 중 $(B * A) * B$ 와 항상 같은 것은?

- ① A ② B ③ $A - B$ ④ $B - A$ ⑤ A^c

해설

$$\begin{aligned}(B * A) * B &= ((B \cup A)^c \cup B)^c = (B \cup A) \cap B^c \\ &= (A \cup B) - B = A - B\end{aligned}$$

10. 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 두 조건 $p: f(x) = 0, q: g(x) = 0$ 을 만족하는 집합을 각각 A, B 라 할 때, 조건 $f(x)g(x) \neq 0$ 을 만족하는 집합은?

- ① $A^c \cap B$ ② $A \cap B^c$ ③ $A^c \cap B^c$
④ $A^c \cup B^c$ ⑤ $A^c \cup B$

해설

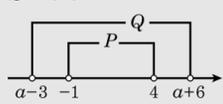
조건 $f(x)g(x) \neq 0$ 을 만족하는 집합은 $\{x \mid f(x) \neq 0 \text{이고 } g(x) \neq 0\}$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 집합은 $A^c \cap B^c$

11. 실수 전체의 집합에서의 두 조건 $p: -1 < x < 4$, $q: a-3 < x < a+6$ 일 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이기 위한 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면 $P = \{x \mid -1 < x < 4\}$
 $Q = \{x \mid a-3 < x < a+6\}$



이때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 위 수직선에서 $a-3 \leq -1$ 이고 $a+6 \geq 4$ 이다.

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

따라서, a 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이므로 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.

12. 다음 명제의 대우가 참인 것은?

- ① $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.
- ② x 가 3의 배수이면 x 가 6의 배수이다.
- ③ $x^2 > 1$ 이면 $x > 1$ 이다
- ④ 삼각형 ABC가 직각삼각형이면 $\angle A = 90^\circ$ 이다.
- ⑤ $a + b > 2$ 이면 $a > 1$ 또는 $b > 1$ 이다.

해설

⑤ 명제의 대우를 살펴보자.
 $a \leq 1$ 이고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ 이다. 다음의 대우의 참, 거짓을 판별해보면 a 의 최댓값은 1, b 의 최댓값도 1 이므로 a, b 의 합의 최댓값은 2 이므로 대우는 참이 된다.

13. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$ 이기 위한 필요충분조건을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

- | | |
|-------------------------------|------------------------|
| ㉠ $xy = 0$ | ㉡ $x = y = 0$ |
| ㉢ $ x + y = 0$ | ㉣ $(x + y)(x - y) = 0$ |
| ㉤ $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 0$ | ㉥ $ x + y = x - y $ |

- ① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉡, ㉣, ㉥ ③ ㉠, ㉢, ㉥
 ④ ㉡, ㉣, ㉥ ⑤ ㉡, ㉢, ㉥

해설

$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
 ㉠ $x = 0$ 또는 $y = 0$
 ㉡, ㉢ $x = y = 0$
 ㉣ $x = -y$ 또는 $x = y$
 ㉤ $x + y = 0, x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
 ㉥ $x + y = x - y$ 또는 $x + y = -x + y$
 $\Leftrightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$
 따라서, 보기중 $x^2 + y^2 = 0$ 이기 위한 필요충분조건은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

14. $p : -1 \leq x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$, $q : x \geq a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
 $\therefore a \leq -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

15. 조건 p, q, r, s 에서 p, q 는 어느 것이나 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이라 한다. 이 때, r 은 s 이기 위한 무슨 조건인가?

- ① 필요조건
- ② 충분조건
- ③ 필요충분조건
- ④ 아무 조건도 아니다.
- ⑤ 위 사실로는 알 수 없다.

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로
 $p \Rightarrow r$ 같은 방법으로 하면
주어진 조건으로부터 $q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$
 $\therefore r \Rightarrow s$ 이고 $s \Rightarrow r$ 이므로 $r \Leftrightarrow s$
따라서, r 은 s 이기 위한 필요충분조건이다.



16. f 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \quad & f(2n) = 2 \cdot f(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \textcircled{B} \quad & f(2n+1) = (-1)^n \cdot 2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

이

때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

17. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

18. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

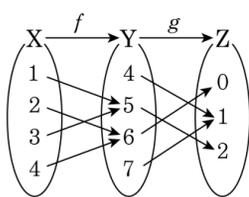
$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

19. 아래 그림과 같이 주어진 함수 f, g 에 대하여 $(g \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?



- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(6) = 2$$

20. 분수함수 $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = x$ 가 성립하는 함수 $g(x)$ 에서 $g(3)$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$(g \circ f)(x) = x \Rightarrow g(f(x)) = x$$

$\therefore g(3)$ 을 구하려면

$f(x) = 3$ 인 x 를 찾으려 한다.

$$3 = \frac{2x-1}{x-1} \text{에서 } x=2$$

$$\therefore g(3) = g(f(2)) = 2$$

21. 함수 $y = \sqrt{a-2x} + 1$ 의 역함수가 점(5, -2) 를 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 12$

해설

역함수가 점 (5, -2) 를 지나므로
원함수는 점 (-2, 5) 를 지나게 된다.
따라서 $5 = \sqrt{a+4} + 1$
 $\therefore a = 12$

22. 함수 $y = 2|x-1| - 2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$y = 2|x-1| - 2$$

(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1) - 2 = -2x$

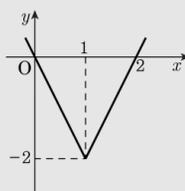
(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x-1) - 2 = 2x - 4$

따라서 $y = 2|x-1| - 2$ 의 그래프와

x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

다음 그림에서

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$



23. 등식 $\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여

$a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} \text{ 에서}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$a = 2 \text{ 이고 } \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{이 때, } b + \frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \text{ 이므로 } b = 1, c = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

24. $x + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \times 2 = 0$$

25. 톱니의 개수가 각각 x, y, z 개인 기어 A, B, C가 그림과 같이 물려 돌아가고 있을 때, A, B, C의 각 속도의 비는?



- ① $x : y : z$ ② $z : y : x$ ③ $y : z : x$
 ④ $yz : xz : xy$ ⑤ $xz : yx : zy$

해설

일정한 시간에 물려 돌아간 톱니의 개수는 같다. 톱니의 개수가 많을수록 회전 속도 즉, 각 속도는 느리다. 따라서 톱니의 개수와 각 속도는 반비례한다.

$$\therefore \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = yz : xz : xy$$

26. 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 일 때, $\sqrt{(a^3 - b^3)^2} - \sqrt{b^6}$ 을 간단히 하면?

- ① a^3 ② $-a^3$ ③ b^3 ④ $-b^3$ ⑤ 0

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ 이려면}$$

$b > 0, a < 0$ 이어야 한다

$$\therefore a^3 - b^3 < 0, b^3 > 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{(a^3 - b^3)^2} - \sqrt{b^6} &= |a^3 - b^3| - |b^3| \\ &= -a^3 + b^3 - b^3 \\ &= -a^3 \end{aligned}$$

27. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \dots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

28. 무리수 $\sqrt{1 + \sqrt{45 - 20\sqrt{5}}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때,

$\frac{1}{b} - a - b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ $\sqrt{5} + 1$

⑤ $\sqrt{5} - 1$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{45 - 20\sqrt{5}} &= \sqrt{45 - 2\sqrt{500}} = \sqrt{25} - \sqrt{20} \\ &= 5 - 2\sqrt{5} \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sqrt{45 - 20\sqrt{5}}} &= \sqrt{1 + 5 - 2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1\end{aligned}$$

$2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 $a = 1$, $b = \sqrt{5} - 2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{b} - a - b &= \frac{1}{\sqrt{5} - 2} - 1 - (\sqrt{5} - 2) \\ &= \sqrt{5} + 2 - 1 - \sqrt{5} + 2 = 3\end{aligned}$$

29. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 제 1, 3 사분면만을 지난다.
- ㉡ 두 점근선의 교점은 (2, 1)이다.
- ㉢ 두 직선 $y = -x + 3$, $y = x - 1$ 에 대해 대칭인 곡선이다.

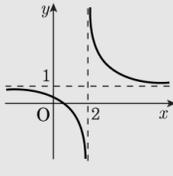
- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 다음 그림의 개형을 가지므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

㉡ 점근선이 $x = 2$, $y = 1$ 이므로 교점은 (2, 1)

㉢ 주어진 분수함수가 $y = \frac{1}{x}$ 을 x 축으로 2, y 축으로 1만큼 평행이동 시킨 것이므로 대칭되는 직선은 기울기가 ± 1 이고 (2, 1)을 지나는 직선이다.
 $\Rightarrow y = x - 1, y = -x + 3$



30. 역함수가 존재하는 분수함수 f 에 대하여 $f^{-1}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = 2x+a$ 이고 $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하면? (단, a 는 상수)

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$f^{-1}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = 2x+a$$

$$\Leftrightarrow f(2x+a) = \frac{x+1}{2x-1}$$

$2x+a = t$ 로 놓으면

$$x = \frac{t-a}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(t) &= \frac{\frac{t-a}{2} + 1}{2 \cdot \frac{t-a}{2} - 1} \\ &= \frac{t-a+2}{2t-2a-2} \dots i) \end{aligned}$$

이때, $f(1) = 2$ 이므로

$$a = -1$$

이 값을 $i)$ 에 대입하면 $f(t) = \frac{t+3}{2t}$

$$\therefore f(3) = 1$$

31. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4-3}$ 의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

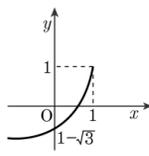
▷ 정답: $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
 $y = \sqrt{-2(x-1)+a+b} = \sqrt{-2x+2+a+b}$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4-3}$ 과 같으므로
 $2+a=4, b=-3$
 $\therefore a=2, b=-3$

32. 무리함수 $y = -\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4



해설

주어진 그림은 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 1, y 축 방향으로 1만큼 평행이동한
 것이므로 $y - 1 = -\sqrt{a(x-1)}$
 즉 $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$
 그런데 이 그래프가 점 $(0, 1 - \sqrt{3})$ 을 지나므로
 $1 - \sqrt{3} = -\sqrt{-a} + 1,$
 $\therefore a = -3$
 $\therefore y = -\sqrt{-3(x-1)} + 1$
 $\therefore a + b + c = (-3) + 3 + 1 = 1$

33. $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y < \sqrt{1-x^2}\}$, $B = \{(x, y) \mid 2x+y > k\}$ 에서 $A \cap B = A$ 가 되게 하는 k 의 범위를 구하면?

- ① $k \leq -2$ ② $k < -2$ ③ $k > -2$
 ④ $k \geq -2$ ⑤ $k \neq -2$

해설

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ 이므로
 그림을 그려 부등식의 영역으로 표시
 하면
 집합 B 에서 $y > -2x + k$ 이므로
 점 $(-1, 0)$ 를 지날 때, $k = -2$ 이다.
 따라서, $A \subset B$ 이려면 $k \leq -2$

