1. 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 우리학교 홈페이지에 글을 올린 사람의 모임

② 내 미니 홈피 방명록에 글을 남긴 사람의 모임

③ 이메일을 가지고 있는 사람의 모임

④ 터치폰을 사용하는 사람의 모임

⑤ 머리가 긴 여학생의 모임

해설

⑤ ‘긴’ 이라는 단어는 개인에 따라 기준이 달라지므로 집합이 될 수 없다.

2. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 5\text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 찾아라.

㉠ $1 \in A$	㉡ $3 \in A$
㉢ $4 \notin A$	㉣ $12 \in A$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

해설

5의 약수는 1, 5이다.

3. 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{x|x$는 짝수$\}$

② $\{x|x$는 10 이하의 2의 배수$\}$

③ $\{x|x$는 9 이하의 짝수$\}$

④ $\{x|x$는 8 미만의 짝수$\}$

⑤ $\{x|x$는 10 미만의 2의 배수$\}$

해설

① $\{2, 4,\ 6,\ 8,\ 10, \cdots\}$
② $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$
③ $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$
④ $\{2,\ 4,\ 6\}$
⑤ $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

4. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$ 일 때, $B - A$ 로 옳은 것은?

① $\{1,\ 6\}$ ② $\{1,\ 2,\ 6\}$ ③ $\{1,\ 3,\ 4,\ 6\}$

④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ ⑤ $\varnothing$

해설

$A \supset B$ 이므로 $B - A = \varnothing$ 이다.

5. 명제 ‘x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다’ 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.

② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.

③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.

④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.

⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설

$p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$

6. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$의 진리집합은?

① $\varnothing$　　② $\{0,\ 1\}$　　③ $\{3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　　⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$을 대입하면$0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

7. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다. $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참

따라서 $Q \subset P$

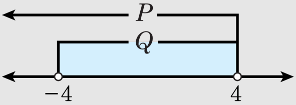
8. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4$, q : $-4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

9. $a>0$ 일 때, $A=1+\frac{a}{2}$, $B=\sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A>B$　② $A<B$　③ $A\geq B$

④ $A\leq B$　⑤ $A=B$

해설

$a>0$ 이므로 $1+\frac{a}{2}>0$, $\sqrt{1+a}>0$

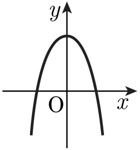
제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2-B^2 &= \left(1+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{1+a}\right)^2 \\ &= 1+a+\frac{a^2}{4}-1-a \\ &= \frac{a^2}{4}>0 \end{aligned}$$

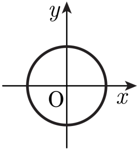
따라서 $A^2>b^2$ 이므로 $A>B$ 이다.

10. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

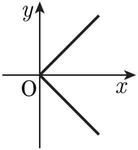
①



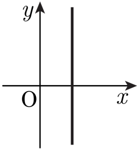
②



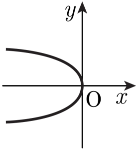
③



④



⑤



해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

11. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

13. 함수 $f(x) = |4x+a|+b$ 는 $x=3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

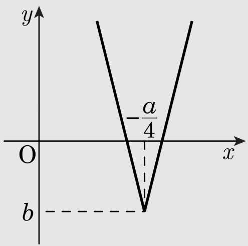
▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x+a|+b = \left|4\left(x+\frac{a}{4}\right)\right|+b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

따라서 $a = -12,\ b = -2$ 이므로

$\therefore b-a = 10$

14. $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x=a$, $y=b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

$$y=\frac{3x+1}{2x-1}$$

$$=\frac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}\quad a+b=2$

15. $n(\varnothing)+n(\{0\})+n(\{\varnothing\})$ 을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$n(\varnothing)=0,\ n(\{0\})=1,\ n(\{\varnothing\})=1$

$n(\varnothing)+n(\{0\})+n(\{\varnothing\})=2$

16. 두 집합 A, B 에 대하여 $B \cap A = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $B \subset (B \cap A)$

② $B \subset A$

③ $A \cup B = A$

④ $(A \cap B) \cap (B \cup A) = A$

⑤ $(B \cup A) \cap (A \cap B) = A$

해설

$B \cap A = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.

③ $B \subset A$ 이므로 $A \cup B = A$

④ $(A \cap B) \cap (B \cup A) = B \cap A = B$ 이므로 옳지 않다.

⑤ $(B \cup A) \cap (A \cap B) = A \cap B = B$ 이므로 옳지 않다.

17. 실수 x에 대하여 $|x-1|<a$ 가 $-2<x<6$ 이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$|x-1|<a \rightarrow -a+1<x<a+1$, $-a+1<x<a+1$ 이 $-2<x<6$ 범위 안에 포함되어야 한다.

$-2 \le -a+1 \rightarrow a \le 3$, $a+1 \le 6 \rightarrow a \le 5$ $\therefore\ a \le 3$

18. 함수 $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p, q)에 대하여 대칭이고, 동시에 $y = x + r$에 대하여 대칭이다. 이때, $p + q + r$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(x+4)-5}{x+4} = \frac{-5}{x+4} + 2$$

따라서 $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4, 2)$에 대하여 대칭이고,

점 $(-4, 2)$를 지나고

기울기가 1인 직선 $y = x + 6$에 대하여 대칭이다.

$\therefore p = -4\ ,\ q = 2\ ,\ r = 6$

$\therefore p + q + r = -4 + 2 + 6 = 4$

19. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4}-3$의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{-2(x-1)+a}+b = \sqrt{-2x+2+a}+b$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4}-3$과 같으므로
$2+a = 4,\ b = -3$
$\therefore\ a = 2,\ b = -3$

20. x에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는
두 그래프 $y = \sqrt{2x}$와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.
이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1,\ 0)$ 을 지난다.
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이
서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,
m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.
$\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면
$2x = m^2(x+1)^2$
$m^2x^2 + 2(m^2-1)x + m^2 = 0$
이 방정식의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = (m^2-1)^2 - m^4 = 0$
$-2m^2 + 1 = 0,\ m^2 = \frac{1}{2}$
$\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$
따라서, m의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로
$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$

21. 실수 전체의 집합 R 의 부분집합 S 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 옳지 않은 것을 고르면? (단, n 은 자연수)

Ⅰ. $5 \in S,\ 7 \in S$
Ⅱ. $p \in S,\ q \in S$ 이면 $p+q \in S$

① $5n \in S$　② $7n \in S$　③ $12n+1 \in S$

④ $12n+2 \in S$　⑤ $17n+3 \in S$

해설

① $p=q=5$ 이면 $p+q=5\times 2 \in S$

$p=5\times 2,\ q=5$이면 $p+q=5\times 3 \in S$

이와 같이 계속하면 $5n \in S$

② ①과 같은 방법으로 $7n \in S$

③ S 를 작은 수부터 차례로 써 보면

$S=\{5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 14, \ldots\}$ 이므로

$13 \notin S \ \leftarrow\ 13=12\times 1+1$

④ $12n+2=5n+7n+7-5=5(n-1)+7(n+1)$ 이므로

①, ②에 의해서 $12n+2 \in S$

⑤ $17n+3=10n+7n+10-7$

$=5(2n+2)+7(n-1) \in S$

22. 두 집합 $A = \{4,\ 7,\ a+1,\ 2a-2\}$, $B = \{3,\ a+2,\ b,\ 9\}$ 에 대하여 $A - B = \{4,\ 6\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A - B = \{4, 6\}$ 이므로

$4 \in A,\ 6 \in A$ 이고 $4 \notin B,\ 6 \notin B,\ 7 \in B$

$a + 1 = 6$ 또는 $2a - 2 = 6$

(i) $a + 1 = 6$ 일 때, $a = 5$

$A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, b, 9\}$

$A - B = \{4, 6\}$ 이려면 $b = 8$

(ii) $2a - 2 = 6$ 일 때, $a = 4$

$A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 6, b, 9\}$

$6 \notin B$ 이어야 하므로 $a \neq 4$

$\therefore A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

23. 두 집합 A, B에 대하여 $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$를 만족할 때, 다음 중 $(A \triangle B) \triangle A$와 같은 것은?

① A　　② B　　③ $A \cup B$

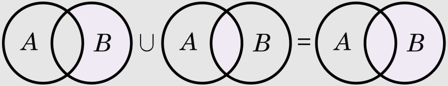
④ $A \cap B$　　⑤ $A \cap B^c$

해설

$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

$\therefore\ (A \triangle B) \triangle A = [(A \triangle B) - A] \cup [A - (A \triangle B)]$

벤 다이어그램으로 설명하면 다음과 같다.



$[(A \triangle B) - A] \cup [A - (A \triangle B)] = B$

24. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}=\frac{1+3}{1-3}=-2$$

$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times499+2)=f(2)=-2$

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60 ② 55 ③ 51 ④ 48 ⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$

$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$

$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡

모든 실수 x에 대하여 ㉠ = ㉡이므로

$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0 (\because a \neq 0)$

즉, $f(x) = x$이므로

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$

$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$