1. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\{4\}) = 4$

② $n(\{0\}) = 0$

③ $n(\{\varnothing\}) = 0$

④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$

⑤ $A = \{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$ 이면 $n(A) = 4$

해설

$A = \{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$
$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이다.
따라서 $n(A) = 4$ 이다.

2. 집합 $A=\{x|x\text{는 }12\text{의 약수}\}$ 일 때, $A \subset B$ 를 만족하는 B 를 고르면?

① $B=\{x|x\text{는 }10\text{의 배수}\}$

② $B=\{x|x\text{는 }20\text{ 미만의 짝수}\}$

③ $B=\{x|x\text{는 }3\text{의 배수}\}$

④ $B=\{x|x\text{는 }24\text{의 약수}\}$

⑤ $B=\{x|x\text{는 }6\text{의 약수}\}$

해설

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
① $B=\{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ \cdots\}$
② $B=\{2,\ 4,\ 6\ ,8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16, 18\}$
③ $B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$
④ $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$
⑤ $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

3. 집합 $A = \{x \mid x$는 5 이하의 홀수$\}$의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5\}$ 이므로 $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

4. 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 a 와 b 를 반드시 포함하고 c 를 포함하지 <u>않는</u> 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$2^{5-3} = 2^2 = 4$ (개)

5. 다음 ①, ②, ③, ④와 서로 같은 집합을 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 중에서 차례대로 골라 쓰시오.

① {1, 2, 3}	㉠ {가, 나, 다}
② {d, e, b}	㉡ $\{x \mid x$는 4 미만의 자연수$\}$
③ {5, 7, 9, 1, 3}	㉢ {b, e, d}
④ {다, 나, 가}	㉣ {1, 3, 5, 7, 9}

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉠

해설

$\{x \mid x$는 4 미만의 자연수$\} = \{1, 2, 3\}$

6. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 12\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

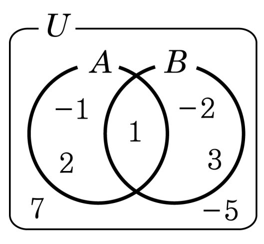
▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$
$\therefore\ n(A \cup B) = 9$

7. 다음 벤 다이어그램을 보고, $A^c \cap B$ 의 원소들의 합을 구하여라.

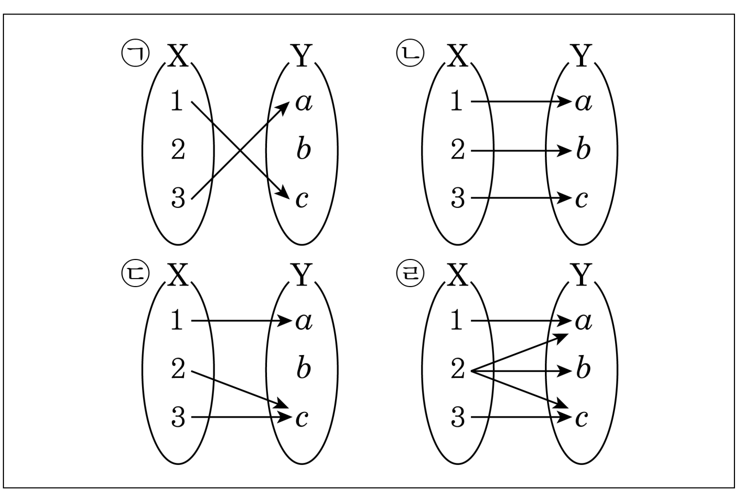


① 1 ② 2 ③ 3 ④ −1 ⑤ −2

해설

$B - A$ 를 나타낸 것이므로 $(-2) + 3 = 1$

8. 다음 대응 관계 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고른 것은?



① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
㉡, ㉢ X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다.
㉣ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 a, b, c 의 3개이므로 함수가 아니다.

9. 명제「a, b가 모두 정수이면 $a+b$ 와 $a-b$ 도 모두 정수이다.」의 역, 이, 대우 중 참 인 것을 <u>모두</u> 적으면?

① 역　　② 이　　③ 대우

④ 역, 이　　⑤ 역, 이, 대우

해설

주어진 명제 : a, b가 모두 정수이면 $a+b$와 $a-b$도 모두 정수이다.(참)
역 : $a+b$ 와 $a-b$도 모두 정수이면 a, b가 모두 정수이다.(거짓)
따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우가 참이 되고, 명제의 역이 거짓이므로 그 대우인 이도 거짓이다.

10. 다음 (　　　)안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 (　　　)조건이다.

▶ 답: 　　　　　　　　　　조건

▷ 정답: 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

11. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x=y=\frac{3}{2}$ 일 때, xy의 최댓값 $\frac{9}{4}$

12. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

13. 함수 $y = x^2 - 2x\ (x \ge 1\ )$ 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x\ (x \ge 1)$

② $y = x^2 - 2x\ (x \le 1)$

③ $y = \sqrt{x+1}\ (x \ge -1)$

④ $y = \sqrt{x+1} + 1\ (x \ge -1)$

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1\ (x \le 1)$

해설

$y = x^2 - 2x$에서 $x^2 - 2x + 1 = y + 1$

$(x-1)^2 = y + 1,\ x - 1 = \sqrt{y+1}\ (\because x \ge 1)$

$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y = \sqrt{x+1} + 1$

이 때, 원래의 함수

$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1\ (x \ge 1\ )$의 치역

$\{y | y \ge -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$의 정의역이 되므로

구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1\ (x \ge -1)$

14. 두 함수 $f(x)=2x-5, g(x)=-x+3$ 에 대하여 $(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 3　② $-\frac{5}{2}$　③ -1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 3

해설

$f(x)=2x-5, g(x)=-x+3$ 에 대하여
$(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))$ 이므로
$g^{-1}(2)=k$ 로 놓으면 $g(k)=2$
$-k+3=2$ 에서 $k=1$
$(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(1)=m$ 으로 놓으면,
$f(m)=1$ 에서 $2m-5=1$
$\therefore m=3$

15. 함수 $y=|x-1|-2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m-1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

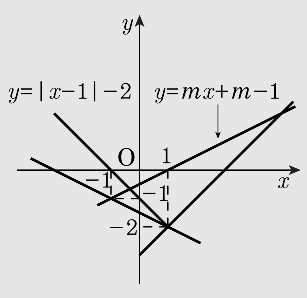
① $-1<m<0$　　② $-\frac{1}{2}<m<1$　　③ $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$

④ $0<m<1$　　⑤ $1<m<2$

해설

$y=|x-1|-2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y=mx+m-1$ 은 $y=m(x+1)-1$ 에서 m 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.



따라서, 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2}<m<1$

16. 함수 $y = \dfrac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \dfrac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y = \dfrac{x+3}{x-3} = 1 + \dfrac{6}{x-3}$

$y = \dfrac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3 , y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3,\ n = 1$

$m + n = 4$

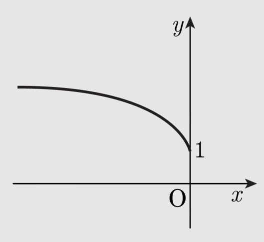
17. 다음 중 무리함수 $y=\sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}}$의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$
② $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$
③ $\{x \mid x \geq 1\}, \{y \mid y \leq 0\}$
④ $\{x \mid x \leq 1\}, \{y \mid y \geq 0\}$
⑤ $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \leq 1\}$

해설

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}} \\
&= \sqrt{-3x+1+2\sqrt{(-3x)\cdot 1}} \\
&= \sqrt{-3x}+1
\end{aligned}
$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



∴ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,
치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$

18. 전체집합 $U = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21\}$의 두 부분집합 $A = \{3,\ 9,\ 15,\ 21\}$, $B = \{12,\ 15,\ 18,\ 21\}$에 대하여 연산 $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$로 정의할 때, $(A \triangle B) \triangle B^c$ 을 나타낸 것은?

① $\{3,\ 6,\ 12\}$
② $\{3,\ 12,\ 18\}$
③ $\{3,\ 15,\ 21\}$
④ $\{6,\ 12,\ 18\}$
⑤ $\{6,\ 12,\ 15,\ 18\}$

해설

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{3,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21\} - \{15,\ 21\} \\ &= \{3,\ 9,\ 12,\ 18\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (A \triangle B) \triangle B^c &= \{3,\ 9,\ 12,\ 18\} \triangle \{3,\ 6,\ 9\} \\ &= \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18\} - \{3,\ 9\} \\ &= \{6,\ 12,\ 18\} \end{aligned}$$

19. 두 조건 $p: -1 \leqq x < 3$, $q: a \leqq x-3 \leqq b$에 대하여 p 가 q이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값을 M, b의 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

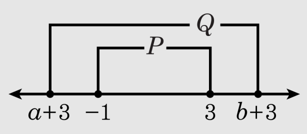
① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

$p: \ -1 \leqq x \leqq 3$

$q: a \leqq x-3 \leqq b \rightarrow a+3 \leqq x \leqq b+3$

$p \rightarrow q \therefore P \subset Q$



$\therefore a+3 \leq -1, b+3 \geq 3$ 즉, $a \leq -4, b \geq 0$

$\therefore M=-4, m=0,\ M+m=-4$

20. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f : X \rightarrow Y$와 함수 $g : Y \rightarrow Z$가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은 얼마인가?

① a　　② b　　③ c

④ b, c　　⑤ a, b, c

해설

$f(x)$가 일대일대응이므로
$f(2) = b$ 또는 $f(2) = c$이어야 한다.
(i) $f(2) = b$인 경우 $f(1) = a$이므로 $f(3) = c$
(ii) $f(2) = c$인 경우 $g(c) = 6$이므로
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 6$
그런데 문제의 조건에서
$(g \circ f)(2) = 4$이므로 모순이다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3) = c$이다.

해설

f와 g가 일대일대응이면
$g \circ f$도 일대일대응이다.
$(g \circ f)(2) = 4$에서
$g(f(2)) = 4$이므로 $f(2) \neq c$
또, $f(1) = a$이고 f가 일대일대응이므로
$f(2) = b$이어야 한다.
$\therefore f(3) = c$

21. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(d>0)$ 와 $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f\circ g)(x)=x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x=m, y=n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ $-\dfrac{1}{3}$　　④ $\dfrac{1}{3}$　　⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f\circ g=I$ 이므로
$g=f^{-1}$ 또는 $g^{-1}=f$
$y=g(x)$ 의 역함수를 구하면

$y=\dfrac{x+2}{3x+4} \Leftrightarrow 3yx+4y=x+2$

$\Leftrightarrow (3y-1)x=-4y+2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4y+2}{3y-1}$

$\therefore y=g^{-1}(x)=\dfrac{-4x+2}{3x-1}$,

$$\begin{aligned} f(x)&=g^{-1}(x)\\ &=\frac{-4x+2}{3x-1}\\ &=\frac{ax+b}{cx+d}(d>0)\text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{4x-2}{-3x+1}\\ &=\frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}\\ &=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m=\dfrac{1}{3}$, $n=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m+n=-1$

22. 무리함수 $y = \sqrt{x-a}+1$ 에 대하여 $f^{-1}(2) = 3$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(3) = 2$
$\therefore 2 = \sqrt{3-a}+1$
$\therefore a = 2$

23. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1 , 참
② $x>1$ 이고 $y>1$, 2 , 참
③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2 , 참
④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

24. 다음 중 틀린 것은?

① $a^2+b^2=0$은 $a=b=0$이기 위한 필요조건이다.

② $xy \le 1$ 또는 $x+y \le 2$는 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x=3$은 $x^2-x-6=0$이기 위한 충분조건이다.

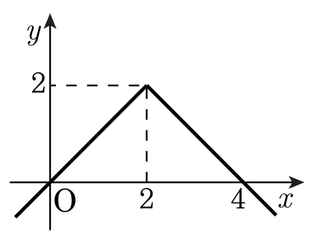
④ a, b, c가 실수일 때, $ac=bc$는 $a=b$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $x+y$가 유리수인 것은 x, y 모두가 유리수이기 위한 필요조건이다.

해설

① $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$ (필요충분조건)
※ 이 경우 필요충분조건이 된다는 것은 서로가 서로에게 충분조건도 되고 필요조건도 되는 것이므로 틀린 것이 아니다.
② 대우 : $x>1, y>1 \Rightarrow xy>1, x+y>2$ (참)
이 : $xy>1, x+y>2 \nRightarrow x>1, y>1$ (거짓) (반례 : $x=10$, $y=0.5$)
대우가 참, 이가 거짓이므로 주어진 명제는 참이고 그 역은 거짓이다.
$\therefore$ 충분조건

25. $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \le 2) & \cdots ㉠ \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

$\therefore x = 1$

㉡에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+4)$

$= -x + 4$

$\therefore x = 3$

실근의 개수 : 2 개.