

1. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-\sum_{k=4}^{10}(k^2+k)$$

- ① 14      ② 16      ③ 18      ④ 20      ⑤ 22

해설

$$(\text{준 식})=\sum_{k=1}^3(k^2+k)=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)=20$$

2.  $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$ ,  $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$  일 때,  $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 1)$  의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 1) &= \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3\end{aligned}$$

3. 수열  $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \dots$  의 제 15 항까지의 합은?

- ①  $\sqrt{14}-1$
- ②  $\sqrt{15}-1$
- ③ 3
- ④  $\sqrt{15}+1$
- ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} \\ &= -\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1}) \\ &= -\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\} \\ &\quad -\{(\sqrt{15}-\sqrt{16})\} \\ &= -(1-\sqrt{16}) = \sqrt{16}-1 = 4-1 = 3 \end{aligned}$$

4.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$  의 값은?

①  $\frac{1}{n+1}$   
④  $\frac{n}{2n+1}$

②  $\frac{n}{n+1}$   
⑤  $\frac{2n}{2n+3}$

③  $\frac{2n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right\} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$



5.  $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$  의 값은?

①  $\frac{101}{100}$

②  $\frac{100}{101}$

③  $\frac{200}{201}$

④  $\frac{110}{101}$

⑤  $\frac{201}{200}$

해설

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

6. 첫째항이 35인 등차수열  $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$$a = 35 \div 9 \text{ } \therefore \text{ } d = -9$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$= \frac{10(70 - 81)}{2}$$

$$= \frac{-110}{2} = -55$$

7. 등차수열  $30, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, -10$ 의 합이 210이 되도록 공차  $d$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-2$

해설

첫째항이 30, 끝항이  $-10$ 이고 항수가  $n+2$ 인 등차수열의 합이 210이므로

$$\frac{(n+2)\{30+(-10)\}}{2} = 210$$

$$n+2=21 \quad \therefore n=19$$

따라서 끝항은 주어진 수열의 제 21 항이므로

$$-10 = 30 + (21-1)d \quad \therefore d = -2$$

8. 첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음 음수가 되는가?

① 23      ② 24      ③ 25      ④ 26      ⑤ 27

해설

첫째항이 45이고, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \cdot 45 + (n-1) \cdot (-4)\}}{2} = n(47-2n)$$

$$n(47-2n) < 0 \text{에서 } n < 0 \text{ 또는 } n > \frac{47}{2}$$

$$n > 0 \text{이므로 } n > \frac{47}{2} = 23.5$$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제 24항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.



9. 첫째항이 100이고, 공차가  $-3$ 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$$\begin{aligned} a_n &= 100 + (n - 1) \cdot (-3) \\ &= -3n + 103 > 0 \\ n &< 34.333 \dots \\ \therefore n &= 34 \text{ 일 때 최대} \end{aligned}$$

10. 8과 27사이에 두 수  $x, y$ 를 넣었더니 8,  $x, y, 27$ 이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때,  $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8,  $x, y, 27$ 이 등비수열이므로

$$a_1 = 8$$

$$a_4 = a_1 r^3 = 27, \quad 8r^3 = 27$$

$$r^3 = \frac{27}{8}, \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$x = a_1 r = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

$$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$$

$$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$$

11. 수직선 위에 서로 다른 두 점  $A(1)$ ,  $B(x)$ 가 있다. 선분  $AB$ 를  $1:2$ 로 내분하는 점을  $P$ 라 하면  $A, P, B$ 의 좌표는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 6
- ⑤ 8

해설

$$P\text{의 }x\text{좌표}=\frac{1\cdot x+2\cdot 1}{1+2}=\frac{x+2}{3}$$
$$1\cdot x=\left(\frac{x+2}{3}\right)^2$$
$$x=\frac{x^2+4x+4}{9}$$
$$9x=x^2+4x+4$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$x=1, 4$$
$$x\neq 1\text{이므로 }x=4$$

12. 수열 8, 4, 2,  $\frac{1}{2}, \dots$  에서 처음으로  $\frac{1}{1000}$  보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11 항

② 제12 항

③ 제13 항

④ 제14 항

⑤ 제15 항

해설

첫째항이 8, 공비가  $\frac{1}{2}$  인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$  에서  $2^{10} = 1024$  이므로

$$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$$



13.  $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 364$ 를 만족하는  $n$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (l^2 + l) \\&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\&= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\&= 364 = 2^2 \times 7 \times 13 \\&\therefore n(n+1)(n+2) = 6 \times 2^2 \times 7 \times 13 = 12 \times 13 \times 14 \\&\text{따라서 } n = 12\end{aligned}$$

14.  $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 56$ 을 만족시키는  $n$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} (\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &\stackrel{=}{\Rightarrow}, \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56 \circ] \text{므로} \\ &n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ &\therefore n = 6 \end{aligned}$$

15.  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21$ 의 값은?

① 2200

② 2640

③ 2860

④ 3020

⑤ 3080

해설

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 &= \sum_{k=1}^{20} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2} \\ &= 2870 + 210 = 3080 \end{aligned}$$

16.  $1 \cdot 20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + \cdots + 20 \cdot 1$ 의 값은?

① 442

② 882

③ 1540

④ 3080

⑤ 3528

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sum_{k=1}^{20} k(21-k) \\&= 21 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} k^2 \\&= 21 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 1540\end{aligned}$$



17. 수열 2, 3, 5, 8, 12, ...에서 처음으로 200보다 커지는 항은?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라 하면, 그 제차수열의 일반항  $b_n$ 은 1, 2, 3, 4, ...

$$\therefore b_n = n$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 2 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} + 2$$

$$\text{따라서 } \frac{n^2 - n}{2} + 2 > 200 \text{에서 } n^2 - n = n(n-1) > 396$$

$$\text{이므로 } 19 \times 20 = 380, 20 \times 21 = 420 \text{에서 } n = 21$$

18. 수열  $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, \dots$ 의 계차수열을  $\{a_n\}$ 이라고 할 때, 다음 중  $\sum_{k=1}^n b_k$ 를 나타내는 식은?

①  $n^2$

②  $n^2 + 2$

③  $n^2 + n + 1$

④  $n^2 + 2n$

⑤  $n^2 + 2n + 3$

해설

수열  $\{a_n\}$ 은  $3, 5, 7, 9, \dots$  이므로

$$b_n = 2n + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (2k + 1)$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= n^2 + 2n$$

19. 수열  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$  에서 제130항을  $\frac{q}{p}$  라 할 때,  $p+q$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 261

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \dots,$$

제1군    제2군    제3군,

$$\left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2k-1}{2^n}\right)$$

제4군

제  $n$  군의 항수는  $2^{n-1}$  이므로 제1군에서 제 $n$ 군까지의 항수의 합은

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

이때,  $n = 7$  이면  $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$  이므로 제 130 항은 제8 군의 3 번째 항이다.

제 $n$  군에서 각 항의 분모는  $2^n$  이고,  $k$  번째 항의 분자는  $2k - 1$  이므로

$$\text{제8군의 3 번째 항은 } \frac{2 \cdot 3 - 1}{2^8} = \frac{5}{256}$$

$$\text{따라서 제130 항은 } \frac{5}{256} \text{ 이므로 } p = 256, q = 5$$

$$\therefore p + q = 256 + 5 = 261$$

20. 수열  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{9}{4}, \frac{16}{4}, \dots$  에서 첫째항부터 제 49항까지의 합은?

- ① 118      ② 120      ③ 122      ④ 125      ⑤ 133

해설

분모가 같은 것끼리 묶으면

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{4}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{9}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{9}{4}, \frac{16}{4}\right), \dots$$

제  $n$  군의 합은

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 에서}$$

제 9 군까지의 항수가 45 개이므로 제49 항은 제10 군의 4 번째 항이다.

따라서 첫째항부터 제 49항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \frac{(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{1+4+9+16}{10} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^9 (2k^2 + 3k + 1) + 3 \\ &= \frac{1}{6} \left( 2 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 9 \right) + 3 \\ &= \frac{1}{6} (570 + 135 + 9) + 3 = 122 \end{aligned}$$