1. $x>0, y>0$ 일 때, $\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)=20+3\left(xy+\frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy+\frac{4}{xy}\geq 2\sqrt{xy\times\left(\frac{4}{xy}\right)}=4$$

$\therefore$ 최솟값 : $20+3\times 4=32$

2. $\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3x}$

해설

$$\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x} = \frac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \frac{2}{3x}$$

3. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=10$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=\frac{x-1}{x-1-x}=1-x$$

$1-x=10$

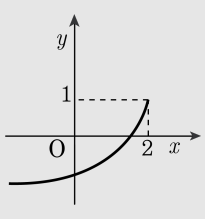
$\therefore x=-9$

4. 좌표평면에서 무리함수 $y = -\sqrt{-x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

① 제 1사분면
② 제 2사분면
③ 제 3사분면
④ 제 1사분면, 제 2사분면
⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은
제 2사분면이다.

5. 집합 $A = \{2a - b | 3a + 2b \le 10,\ a,\ b$는 자연수$\}$일 때, 다음 중 집합 A와 서로 같은 것은?

① $\{x | -1 < x < 3,\ x$는 정수$\}$ ② $\{x | -1 \le x \le 3,\ x$는 정수$\}$

③ $\{x | 1 < x < 5,\ x$는 자연수$\}$ ④ $\{x | 1 \le x \le 3,\ x$는 자연수$\}$

⑤ $\{x | 1 \le x \le 5,\ x$는 자연수$\}$

해설

$3a + 2b \le 10$ 을 만족하는 자연수 $a,\ b$ 의 순서쌍은 $(a, b) = (1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 1),\ (2, 2)$ 이므로, $2a - b = \{1,\ 0,\ -1,\ 3,\ 2\}$

$\therefore\ A = \{x | -1 \le x \le 3,\ x$는 정수$\}$

6. 두 명제 $p \rightarrow \sim q$와 $\sim r \rightarrow q$가 참일 때, 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은? (단, $\sim p$는 p의 부정이다.)

① $q \rightarrow \sim p$　② $p \rightarrow r$　③ $q \rightarrow \sim r$

④ $\sim q \rightarrow r$　⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow \sim q$, $\sim r \rightarrow q$의 대우인 $q \rightarrow \sim p$, $\sim q \rightarrow r$도 참이다.
$p \rightarrow \sim q \rightarrow r$이므로 $p \rightarrow r$, 그 대우인 $\sim r \rightarrow \sim p$도 참이다.

7. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

ㄱ. $p : a^2+b^2=0,\ q : ab=0$

ㄴ. $p : (a-b)(b-c)=0,\ q : a=b=c$

ㄷ. $p : a>b$ 이고 $b>c,\ q : a>c$

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $p : a^2+b^2=0$ 에서 $a=b=0$ 이고, $q : ab=0$ 에서 $a=0$ 또는 $b=0$ 이므로 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이다.

ㄴ $p : (a-b)(b-c)=0$ 에서 $a=b$ 또는 $b=c$ 이고 $q : a=b=c$ 이므로 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이다.

ㄷ $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이다.

8. 직선 $y = m|x-1|+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

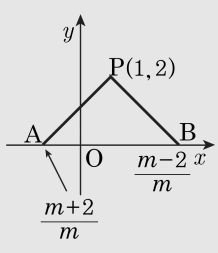
해설

$y = m|x-1|+2$

i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 $(1,\ 2)$을 지난다.



x절편은 ㉠에서 $x = \frac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = \frac{-4}{m}$

$\therefore$ $\triangle PAB$의 면적이 10이므로

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\frac{2}{5}$

해설

삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

$\overline{AB} = 10$

즉 그래프의 x절편이 $-4,\ 6$이다.

$y = m|x-1|+2$에 $(6,\ 0)$을 대입하면

$0 = m|6-1|+2,\ 5m = -2$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$

9. $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+4}$를 간단히 하면?

① $\dfrac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

② $\dfrac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

③ $\dfrac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

④ $\dfrac{2(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

⑤ $\dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\\ &\quad -\left(1+\frac{1}{x+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x+4}\right)\\ &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\\ &= \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}-\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}\\ &= \frac{(2x+5)(x^2+5x+6-x^2-5x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\\ &= \frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\end{aligned}$$

10. $2+\dfrac{1}{k+\dfrac{1}{m+\dfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m의 값에 대하여 $k+m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$$\frac{803}{371}=2+\frac{61}{371}=2+\frac{1}{\frac{371}{61}}$$

$$=2+\frac{1}{6+\frac{5}{61}}=2+\frac{1}{6+\frac{1}{\frac{61}{5}}}$$

$$=2+\frac{1}{6+\frac{1}{12+\frac{1}{5}}}$$

따라서 $k=6$, $m=12$

$\therefore k+m=18$

11. x km인 길을 왕복하는데 갈 때는 a km/h, 올 때는 b km/h의 속력으로 걸었다. 이때, 평균속력은?

① $\dfrac{x}{a+b}$ ② $\dfrac{a+b}{x}$ ③ $x(a+b)$
④ $\dfrac{2ab}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{2(a+b)}{ab}$

해설

$$\frac{2x}{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}} = \frac{2x}{\frac{(a+b)x}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

12. 다음 집합 중에서 무한집합인 것을 모두 고르면?

① $\{x \mid x$는 5의 배수$\}$

② $\{x \mid x$는 100이하의 홀수$\}$

③ $\{x \mid x$는 $x \geq 5$인 수$\}$

④ $\{x \mid x$는 $0 < x < 1$인 분수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 $6 < x < 7$인 자연수$\}$

해설

① $\{5,\ 10,\ 15,\ 20, \cdots\}$ 무한집합

② $\{1,\ 3,\ 5,\ 7, \cdots,\ 97,\ 99\}$ 유한집합

③ $\{5,\ 6,\ 7,\ 8, \cdots\}$ 무한집합

④ $\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ 무한집합

⑤ 공집합

13. 전체집합 $U = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cup B = U$, $A \cap B = \{30, 50\}$ 을 만족한다. 집합 A, B 의 원소의 합을 각각 $S(A)$, $S(B)$ 라고 할 때, $S(A) + S(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 230

해설

$S(A) + S(B)$ 의 값을 구하는 것이므로
각 원소를 아무렇게나 배열해도 원소의 합은 같다.
$\therefore\ 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + (30 + 50) = 230$

14. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 5, 6, 9, 12\}$, $A \cap B = \{6, 9, 12\}$ 가 성립할 때 다음 중 집합 B 가 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{6, 8, 9, 12\}$ ② $\{6, 8, 9, 10, 12\}$

③ $\{5, 6, 8, 12\}$ ④ $\{1, 5, 6, 9\}$

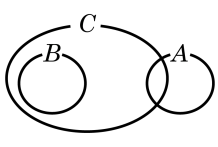
⑤ $\{6, 9, 12\}$

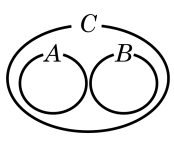
해설

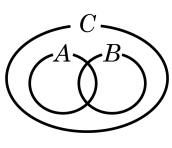
$\{6, 9, 12\} \subset B \subset \{3, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 이므로 집합 B 는 원소 6, 9, 12 은 반드시 포함하는 집합이다.
따라서 ③, ④ 은 B 가 될 수 없다.

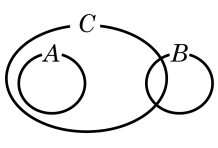
15. 다음 세 명제 p, q, r가 모두 참일 때, 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면?

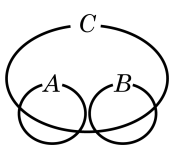
> p : $x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다.
> q : $x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다.
> r : $x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다.

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

p : $x \in A$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $A \subset C$
q : $x \in B$ 이면 $x \notin A$ 이다. 따라서 $A \cap B = \varnothing$
r : $x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다. 즉 $x \in B$ 이면 $x \in C$ 이다. 따라서 $B \subset C$

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \varnothing$ 일 때, $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ 이라면 집합 B 로 알맞지 않은 것은?

① $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8\}$ ② $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$

③ $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$ ④ $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\}$

⑤ $B = \{1\ ,2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8, 9\}$

해설

$A - B = \varnothing$ 이면 집합 A 의 모든 원소는 집합 B에 속한다.

17. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은?(a, b, c 는 모두 양수)

① $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$

$= a + b + 2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$(단 $a = b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

$\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a = b$)

④ (반례) $a = 1$

$1^2 - 1 > 1, 0 > 1$

$\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b = c$)

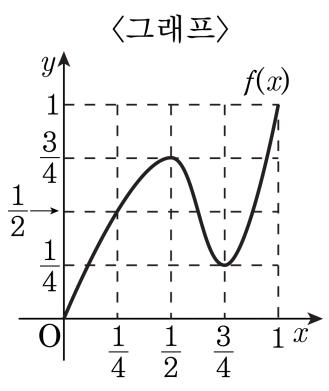
$c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c = a$)

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$

(등호 성립조건은 $a = b = c$)

18. $R=\{x|0\le x\le 1\}$이라 할 때, R에서 R로의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x)=(f\circ f\circ \dots \circ f)(x)$: f 개수 n개)

〈그래프〉



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$)

① $\frac{99}{2}$ ② $\frac{95}{2}$ ③ $\frac{93}{2}$ ④ $\frac{91}{2}$ ⑤ $\frac{89}{2}$

해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f^2\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f^3\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4},\ \cdots$ 이므로

$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4},\ f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)=33\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{99}{2}$

19. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(3g(x)+4x+6)=x$ 가 성립한다. 이 때, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -12

해설

$f(3g(x)+4x+6)=x$ 에서
$f^{-1}(x)=3g(x)+4x+6$
이때, $f^{-1}(x)=g(x)$ 이므로
$g(x)=3g(x)+4x+6$
$\therefore g(x)=-2x-3$
한 편, $y=g(x)$ 로 놓고 $y=-2x-3$ 을
x 에 대하여 정리하면 $2x=-y-3$ 에서
$x=-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$
여기서 x, y 를 서로 바꾸면
$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
$\therefore f(x)=g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
$\therefore f(3)+g(3)=-3-9=-12$

20. 1, 2, 3 번 문제의 정답률을 100 명의 학생을 대상으로 조사하였다. 1 번 문제를 맞힌 학생은 50 명, 2 번 문제를 맞힌 학생은 35 명, 3 번 문제를 맞힌 학생은 45 명이었다. 또, 1 번 문제를 맞히고 2 번 문제를 틀린 학생은 35 명, 2 번 문제를 맞히고 3 번 문제를 틀린 학생은 25 명, 3 번 문제를 맞히고 1 번 문제를 틀린 학생은 33 명이었다. 1, 2, 3 번 문제를 모두 틀린 학생이 5 명일 때, 두 문제만 맞힌 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 31 명

해설

전체 학생의 집합 U 라 두고, 1 번 문제를 맞힌 학생의 집합 A, 2 번 문제를 맞힌 학생의 집합 B,
3 번 문제를 맞힌 학생의 집합을 C 라 두면,
$n(U) = 100, n(A) = 50, n(B) = 35, n(C) = 45$ 이다.
1 번 문제를 맞히고 2 번 문제를 틀린 학생 수
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 \rightarrow n(A \cap B) = 15$
2 번 문제를 맞히고 3 번 문제를 틀린 학생 수
$n(B - C) = n(B) - n(B \cap C) = 25 \rightarrow n(B \cap C) = 10$
3 번 문제를 맞고 1 번 문제를 틀린 학생 수
$n(C - A) = n(C) - n(C \cap A) = 33 \rightarrow n(C \cap A) = 12$
1, 2, 3 번 문제를 모두 틀린 학생 수
$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 5 \rightarrow n(A \cup B \cup C) = 95$
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$ 이므로,
$95 = 50 + 35 + 45 - 15 - 10 - 12 + n(A \cap B \cap C)$
$\rightarrow n(A \cap B \cap C) = 2$,
두 문제만 맞힌 학생 수는
$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$
$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C) = 15 + 10 + 12 - 6 = 31$

21. 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 두 등식을 만족할 때, c값의 범위는?

$$a+b+c=5,\ \ b^2+c^2=11-a^2$$

① $-\frac{1}{2}\le c\le\frac{1}{2}$　② $-3\le c\le\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}\le c\le 3$
④ $1\le c\le\frac{3}{2}$　⑤ $1\le c\le\frac{5}{2}$

해설

$a+b=5-c,\quad a^2+b^2=11-c^2$을
코시-슈바르츠 부등식
$(a^2+b^2)(1^2+1^2)\ge(a+b)^2$에 대입하면
$2(11-c^2)\ge(5-c)^2$
$3c^2-10c+3\le 0,\ (3c-1)(c-3)\le 0$
$\therefore\ \frac{1}{3}\le c\le 3$

22. 함수 $f(x)$가 임의의 $x,\ y$ 에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2,\ f(x)=f(-x)$를 만족시킬 때, $f(1)\cdot f(2)$의 값은? (단, $f(0)=1$)

① 1 ② 4 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

임의의 $x,\ y$ 에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2$, $f(x)=f(-x)$ 일 때

ⅰ) $x=1,\ y=0$ 을 대입

$f(1+0)+f(0-1)-2f(0)=2\times1$ ($\because\ f(0)=1$)

$f(1)+f(-1)-2\times1=2\times1$

$2f(1)=4$ ($\because f(1)=f(-1)$) $\rightarrow f(1)=2$

ⅱ) $x=1,\ y=1$ 을 대입

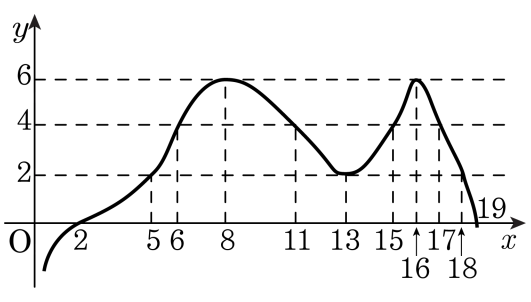
$f(1+1)+f(1-1)-2f(1)=2\times1$

$f(2)+f(0)-2\times2=2$

$f(2)+1-4=2\ \rightarrow\ f(2)=5$

$\therefore\ f(1)\cdot f(2)=2\times5=10$

23. 아래 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. x에 관한 방정식 $f(f(x+2))=4$의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적으면? (단, $x<2$ 또는 $x>19$ 일 때, $f(x)<0$ 이다.)



① $2, 20$ ② $2, 22$ ③ $3, 30$ ④ $4, 42$ ⑤ $4, 50$

해설

$f(f(x+2))=4$ 에서 $f(x+2)=a$ 로 놓으면
$f(a)=4$, $y=f(x)$ 와 $y=4$ 가 만나는 점의 x좌표가 a값 이므로
$a=6, 11, 15, 17$
그런데 $f(x+2)\le 6$ 이므로 $a\le 6$
$\therefore a=6$
$f(x+2)=6,\ x+2=8, 16$
$\therefore x=6, 14$
$\therefore x$값은 2개. 합은 $6+14=20$

24. $\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$을 만족하고, 기약분수 $\frac{17}{a}$ 이 유한소수가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 25 ② 32 ③ 77 ④ 85 ⑤ 100

해설

$\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$에서

$\frac{17}{34} < \frac{17}{a} < \frac{17}{17}$이므로

$17 < a < 34$

이 중에서 $\frac{17}{a}$가 유한소수가 되게하는 정수는

$20, 25, 32$이므로

$20 + 25 + 32 = 77$

25. 평면 위에 좌표가 $(p,\ \sqrt{q})$인 위치에 점들이 찍혀 있다. 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{2}$인 직선을 그을 때, 몇 개의 점들을 통과하는가? (단, $p = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 1000,\ q = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 1000$)

① 20개 ② 21개 ③ 22개 ④ 23개 ⑤ 24개

해설

$\sqrt{q} = \sqrt{2p}$가 성립하는 자연수 $p,\ q$의 쌍을 구한다.

$1 \le p \le 1000,\ 1 \le q \le 1000,\ q = 2p^2$에서

$1 \le 2p^2 \le 1000$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}} \le p \le \sqrt{\frac{1000}{2}}$

p는 자연수이므로 $p = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 22$

따라서, 22개다.