

1. 다음 중 집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① 우리 반에서 안경을 낀 학생들의 모임
- ② 부산에 사는 중학생들의 모임
- ③ 예쁜 강아지들의 모임
- ④ 영어를 잘하는 학생들의 모임
- ⑤ 우리 반에서 키가 가장 작은 학생의 모임

해설

③에서 예쁜 강아지와 ④에서 영어를 잘하는 학생은 그 기준이 명확하지 않다.

2. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\{0, 1, 2\}) = 2$

② $n(\{x|x\text{는 }4\text{의 약수}\}) = 4$

③ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{1, 2\}) = 3$

④ $n(\{x|x\text{는 }10\text{보다 작은 자연수}\}) = 10$

⑤ $n(\{\emptyset\}) = 1$

해설

① $n(\{0, 1, 2\}) = 3$

② $n(\{x|x\text{는 }4\text{의 약수}\}) = n(\{1, 2, 4\}) = 3$

③ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{1, 2\}) = 3 - 2 = 1$

④ $n(\{x|x\text{는 }10\text{보다 작은 자연수}\})$
 $= n(\{1, 2, \dots, 9\}) = 9$

3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3을 포함하고 원소 6을 포함하지 않는 부분집합으로 옳은 것은?
- ① $\emptyset$ ② $\{1, 6\}$ ③ $\{1, 4, 12\}$
- ④ $\{1, 3, 4, 10\}$ ⑤ $\{1, 3, 4, 12\}$

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로
① 원소 1, 3이 포함되지 않음.
② 원소 6이 포함.
③ 원소 3이 포함되지 않음.
④ $\{1, 3, 4, 10\} \not\subset A$
⑤ $\{1, 3, 4, 12\} \subset A$

4. 집합 A 의 부분집합의 개수가 4개일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$2^n = 4 \therefore n = 2$$

5. 두 집합 $A = \{7, 3, 5\}$, $B = \{3, 5, a + 2\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = B$ 이면 두 집합의 모든 원소가 같아야 한다.
집합 B 에서 $a + 2 = 7$ 이므로 $a = 5$ 이다.

6. $x > 0, y > 0$ 일 때, $(3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$$

$$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x} \cdot \frac{3x}{y}}$$

$$= 13 + 12 = 25$$

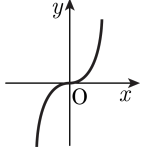
$$\therefore (3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 25$$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

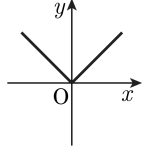
따라서 최솟값은 25 이다.

7. 다음 중 함수의 그래프가 아닌 것은?

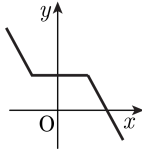
①



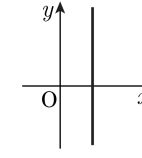
②



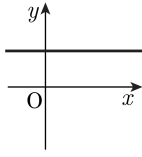
③



④



⑤



해설

함수가 되기 위한 2가지 조건

(i) 정의역에 있는 모든 원소가 빠짐없이 공역에 있는 원소에 대응되어야 한다.

(ii) 정의역에 있는 각각의 원소가 공역의 오직 하나의 원소에 대응되어야 한다.

④ : x 의 한 값 x_1 에 y 의 값이 무수히 많이 대응되고 있으므로 함수가 될 수 없다.

8. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하면?

① 6 개 ② 8 개 ③ 18 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

9. $x : y = 4 : 3$ 일 때, $\frac{xy}{x^2 - 2y^2}$ 의 값을 구하면?

① -2

② 2

③ -4

④ 4

⑤ -6

해설

$x = 4k, y = 3k$ (단, $k \neq 0$)

$$\frac{xy}{x^2 - 2y^2} = \frac{12k^2}{16k^2 - 18k^2} = -6$$

10. $\{1, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 X 는 1, 4 를 반드시 원소로 가지는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$ (개)

11. 세 집합 A, B, X 에 대하여 $X \cap (A \cup B) = X$ 일 때 다음 중 옳은 것은?

- ① $X \subset A$ ② $X \subset (A \cap B)$ ③ $X \subset (A \cup B)$
④ $(A \cup B) \subset X$ ⑤ $(A \cap B) \subset X$

해설

$X \cap (A \cup B) = X$ 는 $X \subset (A \cup B)$ 를 의미한다.

- ① $X \subset A$ 는 알 수 없다.
② $X \subset (A \cap B)$ 는 알 수 없다.
④ $(A \cup B) \subset X$ 는 알 수 없다.
⑤ $(A \cap B) \subset X$ 는 알 수 없다.

12. 명제 ‘ x 가 소수이면 x 는 홀수이다.’는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

13. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로

구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

14. 자연수 전체의 집합 N 에 대하여 함수 $f : N \rightarrow N$ 을 $f(n) = (n \text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정의한다. 이 때, 집합 $A = \{n | f(n) = 2\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

① $1 \in A$

② $2 \in A$

③ $4 \in A$

④ $6 \in A$

⑤ $10 \in A$

해설

$f(n) = 2$ 란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

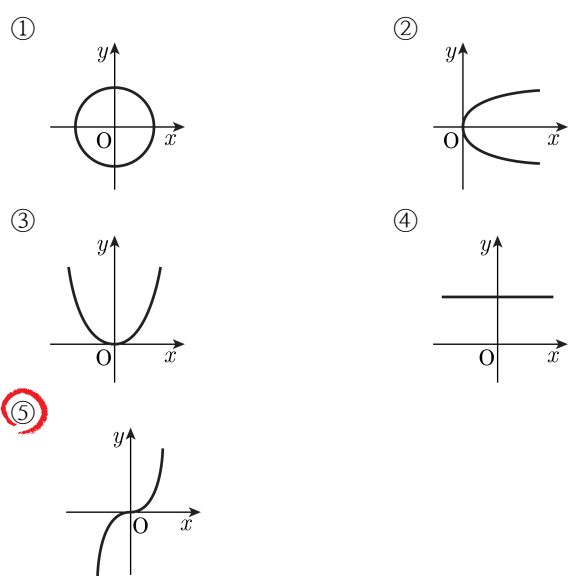
15. 다음 중 항등함수를 찾으면?

- ① $f(x) = x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x - 1$
④ $f(x) = x^2$ ⑤ $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는 $f(x) = x$ 또는 $y = x$ 이다.

16. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?



해설

일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

17. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(ax + 3) \\ &= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x \end{aligned}$$

따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

18. 함수 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m, n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3, n = 1$

$$m + n = 4$$

19. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a$, $y = b$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3 \text{ 에서 점근선은}$$

$$x = -1, y = 3$$

$$a = -1, b = 3$$

$$\therefore a + b = 2$$

20. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ 이므로 } f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2} \text{ 의}$$

역함수를 구하면

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4$$

$$\therefore 2+3+4=9$$

21. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① $q \rightarrow r$
- ② $\sim p \rightarrow \sim r$
- ③ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ④ $p \rightarrow r$
- ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이면 그 대우도 참이다.
 $p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T)$
 $\sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T)$
 $p \rightarrow q \rightarrow r$ 이므로, $p \rightarrow r(T)$
 $\therefore \sim r \rightarrow \sim p(T)$

22. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?
- ① $p : ac = bc, q : a = b$
 - ② $p : A \subset B, q : A - B = \emptyset$
 - ③ $p : a > 0$ 이고 $b < 0, q : ab < 0$
 - ④ $p : a + b$ 가 정수, $q : a, b$ 가 정수
 - ⑤ $p : \triangle ABC$ 는 정삼각형이다. $q : \triangle ABC$ 의 세 내각의 크기가 같다.

해설

- ① $ac = bc \xrightarrow[\leftarrow \text{○}]{\rightarrow \text{×}} a = b$ (반례 : $a = 1, b = 2, c = 0$)
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건
- ② $A \subset B \xrightarrow[\leftarrow \text{○}]{\rightarrow \text{○}} A - B = \emptyset$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건
- ③ $a > 0$ 이고 $b < 0 \xrightarrow[\leftarrow \text{×}]{\rightarrow \text{○}} ab < 0$ (반례 : $a = -2, b = 2$)
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건
- ④ $a + b$ 가 정수 $\xrightarrow[\leftarrow \text{○}]{\rightarrow \text{×}} a, b$ 가 정수 (반례 : $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$)
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건
- ⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

23. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

24. 분수식 $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{2}{x(x+1)}$

② $\frac{1}{x(x+2)}$

③ $\frac{1}{x(x+1)}$

④ $\frac{2}{x(x+2)}$

⑤ $\frac{3}{x(x+2)}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{(x+1)-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ \frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{(x+2)-(x+1)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)}\end{aligned}$$

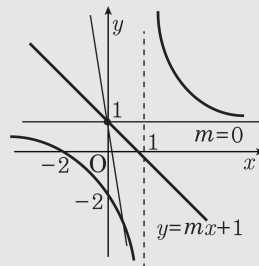
25. 분수함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = mx + 1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $0 < m \leq 12$ ② $-12 \leq m < 0$ ③ $-12 < m \leq 0$
 ④ $0 \leq m < 12$ ⑤ $-12 \leq m \leq 12$

해설

$y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$ 이므로 함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

(i) 그림에서 $m = 0$ 일 때
 두 그래프는 만나지 않는다.



(ii) $y = \frac{x+2}{x-1}$ 와 $y = mx + 1$ 에서

$$\frac{x+2}{x-1} = mx + 1$$

$$\text{즉, } mx^2 - mx - 3 = 0$$

이때, 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 + 12m < 0, \quad m(m+12) < 0$$

$$\therefore -12 < m < 0$$

(i), (ii) 에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는
 $-12 < m \leq 0$

26. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수는?

$A \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 5\}$ $A \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$A \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 5\}$ 에서 집합 A 는 원소 2, 5를 포함하고, 원소 3, 4는 포함하지 않는다.
 $A \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 A 는 원소 1을 포함한다.
 $\therefore A = \{1, 3, 4\}$
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개)이다.

27. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 10\}$ 에 대하여 $A * B = (A \cup B) - B$ 라고 할 때, $(A * B) * B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 5, 20\}$

해설

$B \subset A$ 이므로 $A * B = A - B$
 $(A * B) * B = ((A - B) \cup B) - B = A - B$
 $\therefore A - B = \{1, 5, 20\}$

28. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 ‘ ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.’를 증명한 것이다.

a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
 $ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(2mn - m - n) + 1$
이때, $2mn - m - n$ 이 ’ 이므로, ab 는 이다.
따라서, ‘ a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.’는 참이고 이것은 주어진 명제의 이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① 자연수, 홀수, 역
- ② 정수, 짝수, 대우
- ③ 정수, 홀수, 대우
- ④ 유리수, 짝수, 이
- ⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면
 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
 $ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(2mn - m - n) + 1$
이때, $2mn - m - n$ 이 이므로 ab 는 이다. 이것은 주어진 명제의 가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

29. 양수 a, b 가 $a + b = 1$ 을 만족시킬 때, 두 수 $P = a^3 + b^3, Q = a^2 + b^2$ 의 대소로 비교로 바른 것은?

- ① $P > Q$
- ② $P \geq Q$
- ③ $P = Q$
- ④ $P < Q$
- ⑤ $P \leq Q$

해설

a, b 는 양수이고 $a + b = 1$ 이므로
 $0 < a < 1, 0 < b < 1$
또 $b = 1 - a$ 이므로
 $P = a^3 + b^3 = a^3 + (1 - a)^3$
 $= a^3 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3$
 $= 3a^2 - 3a + 1$
 $Q = a^2 + b^2 = a^2 + (1 - a)^2$
 $= a^2 + a^2 - 2a + 1$
 $= 2a^2 - 2a + 1$
 $P - Q = 3a^2 - 3a + 1 - 2a^2 + 2a - 1$
 $= a^2 - a = a(a - 1)$
그런데 $0 < a < 1$ 이므로 $a(a - 1) < 0$
 $\therefore P - Q < 0$ 이고 $P < Q$

30. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$

② $2a + b$

③ $2a + 3b$

④ $3a + b$

⑤ $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$

$$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$$

$$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$$

$$\text{따라서 } 3f(2) + f(3) = 3a + b$$

31. 두 함수 $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = 2x + 3$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2)$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = 2x + 3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ g \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \circ g \\ &= f^{-1} \circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2) &= (f^{-1} \circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1) = a$ 라고 하면 $f(a) = -1$ 이므로

$$4a + 1 = -1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2) = -\frac{1}{2}$$