1. 9보다 작은 짝수의 집합을 A라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1 \in A$ ② $3 \notin A$ ③ $4 \in A$ ④ $5 \notin A$ ⑤ $6 \in A$

해설

집합 A를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{2, 4, 6, 8\}$이다. 따라서 $1 \notin A$

2. 전체집합 $U = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ 의 두 부분집합 $A = \{3, 6, 15\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A^c = \{9, 12, 18\}$ ㉡ $B^c = \{15\}$

㉢ $A \cup B^c = \{3, 6, 15, 18\}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠ , ㉢

④ ㉡ , ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.

따라서 ㉡ 에서 $B^c = \{15, 18\}$ 이므로 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

3. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 조건 p 를 만족시키는 집합 P 와 조건 q 를 만족시키는 집합 Q 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$ ② $Q^c \subset P^c$ ③ $Q \subset P^c$

④ $Q^c \subset P$ ⑤ $Q = P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$\therefore$ $Q^c \subset P^c$

4. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2)$
$= 2([\text{다}]) \geq 0$
(단, 등호는 $[\text{라}] \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab| - ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)

5. $f(x)=\begin{cases}4x^2+1 & (x\geq 0)\\ 2x+1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=3x-7$ 일때, $(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g^{-1}\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ(g^{-1})^{-1}=f^{-1}\circ g$ 이고
$g(x)=3x-7$ 에서 $g(3)=3\times 3-7=2$ 이다.
$(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))$
$=f^{-1}(2)$
$(f^{-1})(2)=a$ 라 하면 $f(a)=2$
그런데 $a<0$ 일 때, $2a+1<1$ 이므로
이 범위에서 $f(a)=2$ 가 되는 a 는 없다.
따라서, $a\geq 0$ 이고 $f(a)=4a^2+1=2$ 에서
$4a^2=1$
$\therefore a=\frac{1}{2}(\because a\geq 0)$
$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(3)=\frac{1}{2}$

6. 두 집합 $A = \{3,\ 5,\ 7,\ a\}$, $B = \{7,\ 5,\ 9,\ b\}$에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$일 때, $a - b$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$A \subset B$이고 $B \subset A$이면 $A = B$이다.
집합 A, B의 모든 원소가 같아야 하므로
$a = 9$, $b = 3$이다.
$\therefore a - b = 9 - 3 = 6$

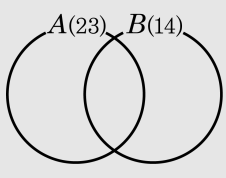
7. 어느 편의점에서는 햄 샌드위치와 치즈 샌드위치 두 종류를 판매한다. 어느 날 판매량을 살펴보니 총 30 명의 손님이 샌드위치를 사갔는데, 23 명의 손님이 햄 샌드위치를 사갔고, 14 명의 손님이 치즈 샌드위치를 사갔다. 샌드위치를 하나만 사간 손님은 모두 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: 명

▷ 정답: 23 명

해설

햄 샌드위치를 산 손님의 집합을 A, 치즈 샌드위치를 산 손님의 집합을 B 라고 할 때, 주어진 조건을 벤 다이어그램에 그리면 다음과 같다.



햄 샌드위치와 치즈 샌드위치를 모두 사간 손님은 $A \cap B$ 이다.

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 23 + 14 - 30 \\ &= 7 \end{aligned}$$

샌드위치를 하나만 사간 손님의 수는
$n(A - (A \cap B)) + n(B - (A \cap B))$ 이다.

$n(A - (A \cap B)) + n(B - (A \cap B))$
$= (23 - 7) + (14 - 7) = 16 + 7 = 23$
따라서 샌드위치를 하나만 사간 손님은 23 명이다.

8. 세 조건 a, b, c 를 만족하는 값들의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $A = \{2p\}$, $B = \{p^2+1,\ 4\}$, $C = \{4,\ 2p+1\}$ 이다. a 가 b 이기위한 충분조건이고, b 는 c 이기위한 필요충분조건일 때, p 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$a \Rightarrow b$ 이므로

$2p = p^2+1$ 또는 $2p = 4$

$b \Leftrightarrow c$ 이므로 $2p+1 = p^2+1$

$\therefore p^2-2p = 0$

따라서 $p = 0$ 또는 $p = 2$

$p = 0$ 이면 $2\times 0 \neq 0+1$ 이고 $2\times 0 \neq 4$ 이므로

$p = 2$

9. $2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$ 이고, $xy > 0$ 일 때, $\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{2}{5}$ ② $\dfrac{4}{5}$ ③ $\dfrac{6}{5}$ ④ $\dfrac{7}{5}$ ⑤ $\dfrac{9}{5}$

해설

$2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$

x $\quad -3y$

$2x$ $\quad y$

$\Rightarrow (x-3y)(2x+y) = 0$

$x = 3y$ 또는 $2x = -y$

$xy > 0$ 이므로 x, y의 부호는 같다

$\therefore x = 3y$

$\Rightarrow \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{(3y-y)^2}{(3y)^2+y^2} = \dfrac{2}{5}$

10. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$일 때, $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ 이므로

$\frac{1}{f(x)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore$ (준 식) $=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$
$(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$
$=\sqrt{100}-1=10-1=9$

11. $x=\sqrt{6-\sqrt{20}}$에 대하여 x의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $x+a-\frac{1}{b}$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$x=\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{5}-1=1.\times\times\times$

정수 부분 $a=1$, 소수 부분 $b=x-a=\sqrt{5}-2$

$x+a-\frac{1}{b}=\sqrt{5}-1+1-\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

$=\sqrt{5}-(\sqrt{5}+2)=-2$

12. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x = \sqrt{5}+1$

$2x - 1 = \sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$

13. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1,\ 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$ 이므로

$y=\dfrac{k}{x-2}+1\cdots①$

①이 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$0=-k+1\ \therefore\ k=1$

$y=\dfrac{1+x-2}{x-2}=\dfrac{x-1}{x-2}$

$\therefore\ a=1,\ b=-1,\ c=-2$

따라서 $abc=2$

14. $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+2}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 $f^{-1}(x) = f(x)$ 가 성립할 때 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x+2}$ 에서 $y = \dfrac{ax+b}{x+2}$ 로 놓고 역함수를 구해보면

$y(x+2) = ax+b,\ yx+2y = ax+b$

$x(y-a) = b-2y,\ x = \dfrac{b-2y}{y-a}$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \dfrac{b-2x}{x-a}$

$f^{-1}(x) = f(x)$ 이므로

$\dfrac{b-2x}{x-a} = \dfrac{ax+b}{x+2}$

$\therefore\ a = -2$

따라서 $f(x) = \dfrac{-2x+b}{x+2}$ 가 점 $(1,1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{-2+b}{1+2},\ 1 = \dfrac{-2+b}{3}$

$\therefore\ b = 5$

$\therefore\ a+b = -2+5 = 3$

15. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6\}$ 일 때, $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$A \cap X = X$이므로 $X \subset A$
$(A \cap B) \cup X = X$이므로 $(A \cap B) \subset X$
$\therefore (A \cap B) \subset X \subset A$

$(A \cap B) = \{2,\ 4\}$ 이므로 x는 원소 2, 4 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$\therefore 2^{4-2} = 2^2 = 4$

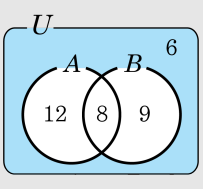
16. 수민이네 반 학생을 대상으로 과목에 대한 선호도를 조사하였더니 음악을 좋아하는 학생이 20 명, 체육을 좋아하는 학생이 17 명, 음악과 체육을 모두 좋아하는 학생이 8 명이고 음악을 좋아하지 않는 학생이 15 명이다. 이때, 음악과 체육을 모두 좋아하지 않는 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

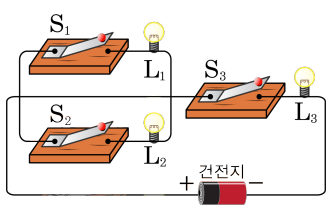
▷ 정답 : 6 명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



17. 다음 그림과 같은 스위치 회로에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

㉠ 스위치 S_1, S_2, S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_1 이 켜지기 위한 충분조건이다.

㉡ 스위치 S_2 와 S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_3 가 켜지기 위한 필요조건이다.

㉢ 스위치 S_2 또는 S_3가 닫히는 것은 전구 L_2 와 L_3 가 모두 켜지기 위한 필요충분 조건이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉡ 충분

㉢ 관계성립하는 경우가 아님

18. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x분씩 늘어나며 y명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
y명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로
$10x + 2y \le 60 \cdots$㉠
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
$10x + 2y \ge 2\sqrt{10x \cdot 2y}$
$10x + 2y \ge 2\sqrt{20xy} \cdots$㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\sqrt{20xy} \le 60,\ 20xy \le 900$
$\therefore xy \le 45$
따라서 xy의 최댓값은 45이다.

19. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x(x \neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

① $\frac{x+2}{x-2}(x \neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x \neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}(x \neq -1)$
④ $\frac{x+2}{x+1}(x \neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x \neq 1)$

해설

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x$ 에서

$\frac{x+1}{x-1} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{t+1}{t-1}$

$\therefore f(t) = \frac{2(t+1)}{t-1}$, $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$

$y = \frac{2(x+1)}{x-1}$ 이면

$yx - y = 2x + 2$ 에서 $x = \frac{y+2}{y-2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}(x \neq 2)$

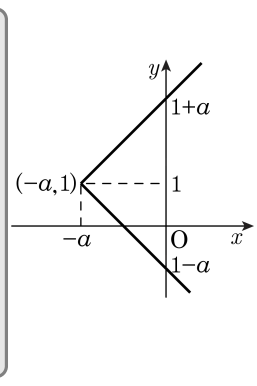
20. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

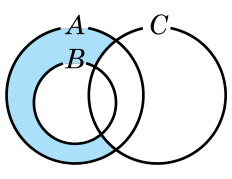
$|y-1|=x+a$ 의
그래프는 $|y|=x$를
x 축 음의 방향으로 a,
y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=4 \quad \therefore\ a=2(a>0)$



21. 집합 $A = \{x | x < 20,\ x$는 홀수인 자연수$\}$, $B = \{2x+1 | x$은 5보다 작은 자연수$\}$,

$C = \left\{x | \dfrac{x+3}{10} = n,\ n$은 자연수$\right\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

그림에 색칠된 부분은 $A - B - C$ 인 것을 알 수 있다.

$A = \{x | x < 20,\ x$는 홀수인 자연수$\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$,

$B = \{2x+1 | x$은 5보다 작은 자연수$\} = \{3, 5, 7, 9\}$,

$C = \left\{x | \dfrac{x+3}{10} = n,\ n$은 자연수$\right\} = \{7, 17, 27, 37, 47, \cdots\}$,

따라서 $(A - B) - C = \{1, 11, 13, 15, 19\}$ 이고 원소의 개수는 5 개이다.

22. 집합 A, B 에 대한 연산 $\triangle$ 를 $A\triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ 라고 정의할 때, 임의의 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$

② $A\triangle A\triangle A\triangle \cdots\cdots \triangle A \neq \phi$

③ $A^c\triangle B^c = A\triangle B$

④ $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$

⑤ $A\triangle(B \cap C) = (A\triangle B) \cap (A\triangle C)$

해설

① 벤 다이어그램을 그려 보면 성립함을 알 수 있다.
② $A\triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \phi$
$(A\triangle A)\triangle A = \phi\triangle A = (\phi\cup A)-(\phi\cap A) = A$ $(A\triangle A\triangle A)\triangle A = A\triangle A = \phi \cdots\cdots$
$A\triangle A\triangle A\triangle \cdots\cdots \triangle A$
$\llcorner$ ——— n개 ——— $\lrcorner$
에서 n 이 홀수이면 A , 짝수이면 ϕ 임을 알 수 있다.
③ $A^c\triangle B^c = (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) = (A \cap B)^c \cap (A \cup B) = (A \cup B) - (A \cap B) = A\triangle B$
④ 벤 다이어그램을 그려 보면 성립함을 알 수 있다.
⑤ 벤 다이어그램을 그려 보면 성립하지 않음을 알 수 있다.

23. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 2$ 일 때, $f(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 60

해설

식 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
$x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면
$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$
$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$
$f(4) = f(3+1) = f(3) + f(1) = 4f(1)$ 이다.

$\vdots$

$f(n-1) = (n-1)f(1)$ 이라 놓으면
$f(n) = f((n-1)+1) = f(n-1) + f(1) = nf(1)$
따라서 $f(30) = 30f(1) = 30 \cdot 2 = 60$ 이다.

24. $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.
따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.
$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$
$\Rightarrow x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
$A = \{x \mid x \geq a\}$ 이므로 $a = 2$

25. 서울시의 전기 요금은 100kWh 이내로 사용한 경우는 6000 원이고, 100kWh 이상은 10kWh 증가할 때마다 1000 원씩 요금이 추가된다고 한다. 사용한 전기의 양을 AkWh , 전기 요금을 B원이라고 할 때, A와 B의 관계식은? (단, $A \geq 100$이고, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.)

① $B = 5000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$
② $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$
③ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-101}{10}\right]$
④ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{11}\right]$
⑤ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-101}{11}\right]$

해설

$100\text{kWh} \leq A < 110\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 0$
$110\text{kWh} \leq A < 120\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 1$
$120\text{kWh} \leq A < 130\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 2$
$\vdots$
$\therefore\ B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$