1. 10 미만의 짝수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 틀린 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $10 \in A$	㉡ $5 \notin A$	㉢ $2 \in A$
㉣ $12 \notin A$	㉤ $8 \notin A$	

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

해설

㉠ $10 \notin A$,

㉤ $8 \in A$

2. $A = \{x | x$는 20 이하의 3의 배수$\}$ 일 때, 집합 A 를 원소나열법으로 나열한 것으로 옳은 것은?

① $A = \{3,\ 6,\ 9\}$

② $A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18\}$

③ $A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

④ $A = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$

⑤ $A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30\}$

해설

20 보다 작은 3 의 배수는 3, 6, 9, 12, 15, 18 이다. 이것이 집합 A 의 원소가 된다. 원소나열법은 집합에 속한 모든 원소를 $\{\ \}$ 안에 나열하는 방법이므로, 이 원소들을 그대로 나열하면 된다.

3. 다음 중 유한집합인 것을 모두 고른 것은?

㉠ 5의 배수의 집합 ㉡ 5와 6 사이의 자연수 ㉢ 짝수의 집합 ㉣ 100보다 큰 3의 배수의 집합 ㉤ 우리나라 중학생의 집합 ㉥ 1보다 작은 자연수의 집합

① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉢, ㉣, ㉤ ③ ㉣, ㉤, ㉥

④ ㉠, ㉣, ㉤ ⑤ ㉡, ㉤, ㉥

해설

㉠ $\{5,\ 10,\ 15, \cdots\}$ 이므로 무한집합이다.

㉡ 5와 6 사이에는 자연수가 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.

㉢ $\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$ 이므로 무한집합이다.

㉣ $\{102,\ 105,\ 108,\ 111,\ \cdots\}$ 이므로 무한집합이다.

㉤ 중학생의 수는 한정되어 있으므로 유한집합이다.

㉥ 1보다 작은 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.

4. 집합 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 2를 반드시 포함하고 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

집합 A 에서 원소 2를 반드시 포함하고, 3을 포함하지 않는 부분집합을 구하면 $\{2\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 5, 7\}$ 이므로 4개이다.

5. 두 집합 $A = \{1, a\}, B = \{2, 3, a-2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, 3\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

두 집합 A, B 는 $A \cap B$ 를 포함한다.
$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 $\{1, 3\} \subset \{1, a\}$, $\{1, 3\} \subset \{2, 3, a-2\}$ 이다.
따라서 $a = 3$ 이다.

6. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 12\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$

$\therefore\ n(A \cup B) = 9$

7. $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 $A=\{2,\ 3,\ 5\}$에 대하여 A^c 은?

① $\{2,\ 3,\ 5\}$ ② $\{1,\ 3,\ 5\}$ ③ $\{1,\ 4,\ 6\}$

④ $\{4,\ 5,\ 6\}$ ⑤ $\{1,\ 2,\ 3\}$

해설

$A^c=\{1,\ 4,\ 6\}$

8. 다음은 경화의 수학일기 중 일부이다. 다음 중 잘못된 것을 골라라.

> 오늘은 집합 A 가 집합 B 의 부분집합일 때, 두 집합사이의 관계를 표현하는 다양한 방법들을 배웠다.
>
> ㉠ $A - B = \varnothing$ ㉡ $A \cap B = A$ ㉢ $A^c \cap B = \varnothing$
>
> ㉣ $B^c \subset A^c$ ㉤ $A \cup B = B$

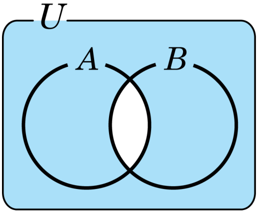
▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉢ $A \subset B$ 일 때, $A^c \cap B \neq \varnothing$ 이다.

9. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 20$, $n(A) = 15$, $n(A - B) = 7$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은
$(A \cap B)^c = U - (A \cap B)$ 이다.
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ 이므로
$n(A \cap B) = 15 - 7 = 8$ 이다.
따라서 $n(U) - n(A \cap B) = 20 - 8 = 12$ 이다.

10. 다음 글을 읽고, 밑줄 친 부분을 수학적 표현을 사용하여 나타낼 때, 틀린 곳을 구하여라.

엄마 : 오늘 오는 친구 중에 초등학교 친구와 중학교 친구는 각각 몇 명이니?
성실 : 초등학교 친구 6명과 중학교 친구 8명이요.
$n(A)=6$ $n(B)=8$
이 말을 들은 엄마는 14명이 먹을 수 있는 음식을 준비했다.
(그 날 저녁)
친구들 : 안녕하세요.
엄마 : 어서들 와라. 그런데! 승훈아!
왜 11명이니? 안 온 사람 있니?
㉠ $n(A\cup B)=11$
성실 : 아니요,
제가 초대한 친구는 모두 왔는데요.
엄마 : 그럼,
초등학교와 중학교가 모두 같은 친구는 3명,
㉡ $n(A\cap B)=3$
초등학교 친구 중 중학교가 다른 친구는 3명이지?
㉢ $n(B-A)=3$
성실 : 예, 맞아요.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

초등학교 친구 중 중학교가 다른 친구들의 집합은 $A-B$이므로
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=6-3=3$ (명)이다.
따라서 ㉢의 수학적인 표현은 $n(A-B)=3$ 이다.

11. 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 5 의 배수의 모임

② 15 보다 큰 14 의 약수의 모임

③ 10 보다 큰 홀수의 모임

④ 가장 작은 자연수의 모임

⑤ 10 보다 조금 작은 수들의 모임

해설

① $\{5, 10, 15, \cdots\}$

② $\varnothing$

③ $\{11, 13, 15, \cdots\}$

④ $\{1\}$

12. 두 집합 $A=\{b,\ c\}$, $B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 $A\subset X\subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{b,\ c\}$ ② $\{a,\ b,\ c\}$ ③ $\{a,\ c,\ e\}$

④ $\{a,\ b,\ f\}$ ⑤ $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$

해설

③ $\{b,\ c\}\not\subset\{a,\ c,\ e\}$

④ $\{b,\ c\}\not\subset\{a,\ b,\ f\}$

13. $U = \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 7\}$, $B = \{1, 2, 7, 8\}$ 에 대하여 $B - (A \cap B)$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{8\}$ ③ $\{1, 8\}$ ④ $\{4, 7\}$ ⑤ $\{4, 8\}$

해설

$B - (A \cap B) = B - A = \{1, 2, 7, 8\} - \{2, 4, 7\} = \{1, 8\}$ 이다.

14. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a^2+2\}$, $B=\{1, 2a-3, 2a+1\}$에 대하여 $A\cap B=\{1,3\}$이 되도록 할 때, a값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=1$

해설

$A\cap B=\{1,3\}$ 이므로 집합

A에서 $a^2+2=3$, 따라서 $a=\pm 1$

i) $a=1$ 이면 $B=\{-1,1,3\}$

ii) $a=-1$ 이면 $B=\{-5,-1,1\}$

$A\cap B=\{1,3\}$ 이므로

$\therefore a=1$

15. 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2-6x+8=0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2-6x+8=0 \ \Leftrightarrow\ (x-2)(x-4)=0 \ \Leftrightarrow\ x=2$ 또는 $x=4$, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$

② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$

③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$

④ $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$

⑤ 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

16. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2=1$이면 $x^3=1$이다.

② $\sqrt{(-3)^2}=-3$

③ $|x|>0$이면 $x>0$이다.

④ $|x+y|=|x-y|$ 이면 $xy=0$이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x^3=-1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x=-2$이면 $|-2|=2>0$ 이지만 $-2<0$이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y|=|x-y|$의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2=(x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2+2xy+y^2=x^2-2xy+y^2$ $\leftrightarrow$ $xy=0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

17. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$　　② $x = 12$　　③ $x = 10$

④ $x = 8$　　⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

18. 명제 '$a = 1$ 이면 $a^2 = a$ 이다.'에 대하여 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 고르면?

① 역　　② 이　　③ 대우

④ 역, 이　　⑤ 역, 이, 대우

해설

$a^2 - a = a(a-1) = 0$, $a = 0,\ 1$

역 : '$a^2 = a$이면 $a = 1$이다.' → 거짓

이 : '$a \neq 1$ 이면 $a^2 \neq a$ 이다.' → 거짓

대우 : '$a^2 \neq a$이면 $a \neq 1$이다.' → 참

19. $a > 0$일 때, $2a + \dfrac{1}{2a}$의 최솟값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a > 0$이므로 $2a > 0$산술기하평균의 관계로부터

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

20. 다음 (　　) 안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1},\ \frac{\sqrt{5}}{4},\ \frac{\sqrt{7}}{9},\ (\qquad),\ \frac{\sqrt{11}}{25}$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$　② $\frac{\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$　⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$ 의 규칙으로 나타난다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$ 이다.
분모는 $+1$ 이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2 = 16$ 이므로 (　) 안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

21. 등차수열 2, a_1, a_2, $a_3, \cdots$, a_{100}, 305 에서 공차는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

등차수열 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100}, 305 에서 공차를 d로 놓으면
305는 제 102항이므로

$305 = 2 + (102 - 1)d$

$\therefore\ d = \dfrac{303}{101} = 3$

22. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$이다.

따라서 $\frac{1}{(가)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\quad\therefore\ (가)=\frac{3}{2}$

23. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

24. 제 3항이 12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$ ② $(-3) \cdot 2^{n-1}$ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$ ⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = -8$

$\therefore r = -2$

$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

25. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-\sum_{k=4}^{10}(k^2+k)$$

① 14　　② 16　　③ 18　　④ 20　　⑤ 22

해설

(준 식)$=\sum_{k=1}^{3}(k^2+k)=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)=20$

26. 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \cdots$ 의 제 15항까지의 합은?

① $\sqrt{14}-1$　② $\sqrt{15}-1$　③ 3

④ $\sqrt{15}+1$　⑤ 5

해설

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$=-\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$$

$$=-\left\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$$

$$-\left\{(\sqrt{15}-\sqrt{16})\right\}$$

$$=-(1-\sqrt{16})=\sqrt{16}-1=4-1=3$$

27. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$　② $\dfrac{n}{n+1}$　③ $\dfrac{2n}{n+1}$
④ $\dfrac{n}{2n+1}$　⑤ $\dfrac{2n}{2n+3}$

해설

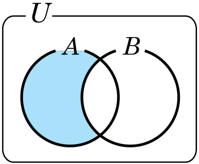
(주어진 식) $= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)\right\}$

$+\cdots+\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$

28. 다음 중 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타낸 것은?



① A^c ② $B - A^c$ ③ $A \cap B^c$

④ $A \cup B^c$ ⑤ $B \cap A^c$

해설

$A \cap B^c = A - B$

29. $a, b, c \in R$ 일 때, 조건 $a = b = c$ 의 부정을 바르게 말한 것은?

① a, b, c 는 모두 다르다.

② a, b, c 는 모두 다르지 않다.

③ a, b, c 중에는 같은 수가 있다.

④ a, b, c 중에는 0 이 아닌 수가 있다.

⑤ a, b, c 중에는 다른 두 수가 있다.

해설

① : $a = b = c \Rightarrow a = b$ 이고, $b = c$ 이고, $c = a$ 이다.
부정 : $a \neq b$ 또는 $b \neq c$ 또는 $c \neq a \Rightarrow a, b, c$ 중에는 다른 두 수가 있다.

30. $x \geq a$가 $-2 \leq x-1 \leq 2$이기 위한 필요조건 일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

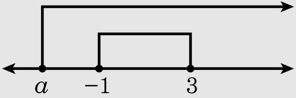
① $a \geq -1$　　② $a \leq -1$　　③ $a \leq 3$

④ $a \geq 3$　　⑤ $a > 3$

해설

$-2 \leq x-1 \leq 2 \rightarrow -1 \leq x \leq 3$,

$x \geq a$ 가 $-1 \leq x \leq 3$의 범위를 포함해야 한다.



31. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \le |a|+|b|$ 이성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \ge 0, |a|+|b| \ge 0$ 이므로
$|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.
$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab)$
그런데, (가) 이므로 $2(|ab|-ab) \ge 0$
$\therefore\ |a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$
따라서 $|a+b| \le |a|+|b|$
여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
즉, $ab \ge 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $|ab| \ge ab, a = b$

② $|ab| \ge ab, |ab| = ab$

③ $|ab| \le ab, |ab| = ab$

④ $|ab| = ab, a = 0$

⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \ge ab (\because |ab|$는 항상 양수)
(나) : $2(|ab| - ab) = 0$ 일 때, 즉 $|ab| = ab$

32. $a \ge 0,\ b \ge 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\text{나})^2}{2}$ 이므로

부등식 $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.

이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\ge,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$
② $\ge,\ a-b,\ a=b=0$
③ $>,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$
④ $>,\ a-b,\ a=b$
⑤ $\ge,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a \ge b$

해설

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

(가) , (나)의 결과에서 $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \ge 0$이므로

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

(다) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2 \ge 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}=0$일 때이므로

등호는 $a=b$일 때 성립한다.

33. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=3$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq 3$$

34. 부등식 $x^2+2y^2+3z^2 \le 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x-2y+3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x-2y+3z)^2$

$=\left\{x+\sqrt{2}(-\sqrt{2}y)+\sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\le \left\{1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2+(-\sqrt{2}y)^2+(\sqrt{3}z)^2\right\}$

$=6(x^2+2y^2+3z^2) \le 144$

$\therefore\ -12 \le x-2y+3z \le 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2+2y^2+3z^2=24$

즉, $x=-y=\pm 2$일 때 등식이 성립한다.

35. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 공차가 각각 $2, 3$인 등차수열일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$의 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

$b_n = b_1 + (n-1) \cdot 3$

$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1) \cdot 5$

$\therefore$ 공차$= 5$

36. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$이므로 $d = -9$

$\therefore S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$= \dfrac{10(70-81)}{2}$

$= \dfrac{-110}{2} = -55$

37. 첫째항이 45 이고, 공차가 -4 인 등차수열은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음 음수가 되는가?

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

해설

첫째항이 45 이고, 공차가 -4 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2\cdot 45+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}=n(47-2n)$$

$n(47-2n)<0$ 에서 $n<0$ 또는 $n>\frac{47}{2}$

$n>0$ 이므로 $n>\frac{47}{2}=23.5$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제 24 항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

38. 8과 27사이에 두 수 x, y를 넣었더니 8, x, y, 27이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8, x, y, 27이 등비수열이므로

$a_1 = 8$

$a_4 = a_1 r^3 = 27$, $8r^3 = 27$

$r^3 = \dfrac{27}{8}$, $\quad \therefore r = \dfrac{3}{2}$

$x = a_1 r = 8 \cdot \dfrac{3}{2} = 12$

$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \dfrac{9}{4} = 18$

$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$

39. 첫째항부터 제 3항까지의 합이 7, 제 4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합을 구하면?

① 320 ② 419 ③ 511 ④ 609 ⑤ 707

해설

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 7$$

$$S_6 - S_3 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} - 7 = 56$$

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1} = 63$$

$$\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 7\times(r^3+1) = 63$$

$$r^3+1=9,\ r^3=8$$

$$\therefore\ r=2$$

$\dfrac{a(8-1)}{2-1} = 7$이므로 $a=1$

$$\therefore S_9 = \frac{a(r^9-1)}{r-1} = \frac{1\cdot(2^9-1)}{2-1}$$

$$= 2^9 - 1 = 512 - 1$$

$$= 511$$

40. 수열 8, 4, 2, $\frac{1}{2}$, $\cdots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11항　② 제12항　③ 제13항
④ 제14항　⑤ 제15항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$n-4=10 \quad \therefore n=14$

41. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $\log_3(S_n + 1) = n$을 만족할 때, a_3의 값은?

① 6 ② 10 ③ 14 ④ 18 ⑤ 22

해설

$3^n = S_n + 1$

$S_n = 3^n - 1$

$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$

$$\begin{aligned} a_n &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)\ (n \geq 2) \\ &= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$

42. 수열 1, 11, 111, 1111, $\cdots$ 에서 제100항은?

① $\dfrac{10^{200}-1}{9}$ ② $\dfrac{10^{100}-1}{9}$ ③ $10^{100}+1$

④ $\dfrac{10^{200}-1}{9}$ ⑤ $10^{200}+1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 10 + 1$

$a_3 = 10^2 + 10 + 1$

$\vdots$

$a_n = 10^{(n-1)} + \cdots + 10^2 + 10 + 1$

$= \dfrac{1\{10^n - 1\}}{10-1} = \dfrac{1}{9}(10^n - 1)$

$\therefore\ a_{100} = \dfrac{10^{100}-1}{9}$

43. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = 364$를 만족하는 n의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l^2+l)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$= 364 = 2^2 \times 7 \times 13$$

$$\therefore\ n(n+1)(n+2) = 6 \times 2^2 \times 7 \times 13 = 12 \times 13 \times 14$$

따라서 $n = 12$

44. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21$ 의 값은?

① 2200 ② 2640 ③ 2860 ④ 3020 ⑤ 3080

해설

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 = \sum_{k=1}^{20} k(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \dfrac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \dfrac{20 \cdot 21}{2}$

$= 2870 + 210 = 3080$

45. 수열 2, 3, 5, 8, 12, $\cdots$ 에서 처음으로 200보다 커지는 항은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면, 그 계차수열의 일반항 b_n 은 1, 2, 3, 4, $\cdots$

$\therefore b_n = n$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$= 2 + \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n^2 - n}{2} + 2$

따라서 $\dfrac{n^2 - n}{2} + 2 > 200$ 에서 $n^2 - n = n(n-1) > 396$

이므로 $19 \times 20 = 380,\ 20 \times 21 = 420$ 에서 $n = 21$

46. 집합 A 의 멱집합 2^A 을 $2^A = \{X \mid X \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{1,\ 2\}$, $B = 2^A$ 일 때, $n(2^B)$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$n(A) = 2$ 이므로 $n(2^A) = 2^2 = 4$ 개

$\therefore\ n(B) = 4,\ n(2^B) = 2^4$ (개)

47. 두 집합 $A=\{3,\ a,\ a^2\}$, $B=\{b,\ c,\ 9\}$ 에 대하여 $A\subset B$, $B\subset A$ 이고, a, b, c 가 서로 다른 자연수일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 93

해설

$A\subset B,\ B\subset A$ 이므로 $A=B$

$9\in B$ 이므로 $9\in A$

$a=9$ 또는 $a^2=9$

(ⅰ) $a=9$ 일 때, $A=\{3,\ 9,\ 81\}$, $B=\{b,\ c,\ 9\}$

$\therefore\ b=3,\ c=81$ 또는 $b=81,\ c=3$

(ⅱ) $a^2=9$ 일 때, $a=3$ (a 는 자연수)

$A=\{3,\ 3^2\}=\{3,\ 9\}$, $B=\{b,\ c,\ 9\}$

b 또는 c가 3 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a+b+c=9+3+81=93$

48. 우리 반 학생 50 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 35 명, 과학을 좋아하는 학생은 25 명일 때, 두 과목 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ **답 :** 명

▷ **정답 :** 35 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 50 명이 $A \cup B$ 이다.
수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라고 하고, 과학을 좋아하는 학생을 집합 B라고 한다.
수학, 과학을 모두 좋아하는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.
$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$50 = 35 + 25 - x$
x 의 최솟값은 10 명이다.
최댓값은 과학을 좋아하는 학생이 수학을 좋아하는 학생에 포함될 때 성립한다.
그러므로 x 의 최댓값은 25 명이다.
최솟값과 최댓값의 합은 35 명이다.

49. 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

> A : 범인은 B이다.
> B : 범인은 D이다.
> C : 나는 범인이 아니다.
> D : B는 거짓말을 하고 있다.

① A, D　② B, C　③ C, B　④ D, C　⑤ B, A

해설

B가 옳은 진술이라면 범인은 D가 되고 C도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B는 거짓이 되고, D가 옳은 진술이 된다. D를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C다.

50. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제130항을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 261

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots,$

제1군 제2군 제3군,

$\left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots, \frac{2k-1}{2^n}\right)$

제4군

제 n군의 항수는 2^{n-1} 이므로 제1군에서 제n군까지의 항수의 합은

$$1+2+\cdots+2^{n-1} = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$$

이때, $n=7$ 이면 $2^7-1=128-1=127$ 이므로 제 130항은 제8군의 3번째 항이다.

제n군에서 각 항의 분모는 2^n 이고, k번째 항의 분자는 $2k-1$ 이므로

제8군의 3번째 항은 $\frac{2\cdot3-1}{2^8} = \frac{5}{256}$

따라서 제130항은 $\frac{5}{256}$ 이므로 $p=256,\ q=5$

$\therefore p+q=256+5=261$