1. 집합 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B=\{a,\ b\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $a \subset A$　② $\varnothing \in A$　③ $B \not\subset A$

④ $A \not\subset B$　⑤ $\{a,\ b,\ c\} \subset A$

해설

① $a \in A$
② $\varnothing \subset A$
③ $B \subset A$

2. 두 집합 $A = \{x \mid a \le 2x+1 \le 9\}$, $B = \{x \mid -2 \le x \le b\}$가 서로 같을 때, 상수 a, b 의 합은? (단, 집합 A, B 는 공집합이 아니다.)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$a \le 2x+1 \le 9$에서

$a-1 \le 2x \le 8$, $\dfrac{a-1}{2} \le x \le 4$

$\therefore A = \left\{x \,\middle|\, \dfrac{a-1}{2} \le x \le 4\right\}$,

$B = \{x \mid -2 \le x \le b\}$

이때, $A = B$이므로

$\dfrac{a-1}{2} = -2$, $b = 4$

$a = -3$, $b = 4$

$\therefore a+b = 1$

3. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$에 대하여 $\{1,\ 2\} \subset X$이고 $X \subset A$를 만족하는 집합 X가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\{1,\ 2\}$ ② $\{1,\ 2,\ 4\}$

③ $\{2,\ 4,\ 8\}$ ④ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

해설

$\{1,\ 2\} \subset X$이고 $X \subset A$이므로 A의 부분집합 중 1, 2를 항상 포함하여야 한다.
그러므로 1을 포함하지 않은 $\{2,\ 4,\ 8\}$이 집합 X가 될 수 없다.

4. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 일 때, $(A - B) \subset X, X - A = \varnothing$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 2 개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{1, 3, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 5\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 2 개이다.

5. 다음은 전체집합 U의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $(A-B)\cap(B\cap A^c)$를 간단히 하는 과정이다.

$$
\begin{aligned}
&(A-B)\cap(B\cap A^c)\\
&=(\ ㉠\ )\cap(B\cap A^c)\\
&=A\cap(\ ㉡\ )\cap A^c\\
&=(A\cap A^c)\cap(\ ㉡\ )\\
&=(\ ㉢\ )\cap(\ ㉣\ )=(\ ㉤\ )
\end{aligned}
$$

빈 칸에 들어갈 식을 바르게 나타낸 것은?

① (㉠) $A\cup B^c$ ② (㉡) $B^c\cup B$ ③ (㉢) U

④ (㉣) $\varnothing$ ⑤ (㉤) U

해설

(㉠) : $A-B=A\cap B^c$

(㉡) : $(A\cap B^c)\cap(B\cap A^c)=A\cap(B^c\cap B)\cap A^c$

(㉢), (㉣), (㉤) : $(A\cap A^c)\cap(B^c\cap B)=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

6. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

7. 전체집합을 U , 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 할 때, 두 집합 $P,\ Q$ 는 $P \cap Q^c = \varnothing,\ Q^c \subset P$ 를 만족한다. 다음 중에서 참인 명제를 모두 고르면?

㉠ p 이면 $\sim q$ 이다.	㉡ p 이면 q 이다.
㉢ $\sim q$ 이면 p 이다.	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$P \cap Q^c = \varnothing$에서 $Q^c \subset P$이므로

$P \cap Q^c = Q^c = \varnothing$

$\therefore\ Q = u$

㉠ $Q^c = \varnothing$이므로 $P \not\subset Q^c$이고

$p \rightarrow \sim q$는 거짓이다.

㉡ $Q = V$이므로 $P \subset Q$이고

$p \rightarrow q$는 참이다.

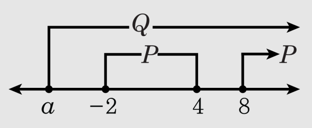
㉢ $Q^c = \varnothing$이고 $Q^c \subset P$이고

$\sim q \rightarrow \sim p$는 참이다.

8. 두 조건 $p : -2 \le x \le 4$ 또는 $x \ge 8$, $q : x \ge a$에 대하여 $p \Rightarrow q$일 때, a의 최댓값은?

① -2 ② 0 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설



$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (P \subset Q)$ 이므로

$\therefore a \le -2$, 최댓값 :-2

9. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $x+y=xy$ 이면 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ 이다.

② $a \neq 0$ 일 때, $ax > b$ 이면 $x > \frac{b}{a}$ 이다.

③ $a > b > 0,\ c > d > 0$ 이면 $ac > bd,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ 이다.

④ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형이다.

⑤ 정삼각형에서 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

해설

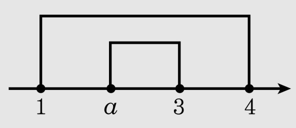
① $xy=0$ 이면 성립하지 않으므로 명제가 거짓이다.
② $a \leq 0$ 이면 성립하지 않으므로 명제가 거짓이다.
③ $4 > 3 > 0,\ 5 > 3 > 0$ 이면 $\frac{4}{5} < \frac{3}{3}$ 이므로 명제가 거짓이다.
⑤ 꼭지각의 이등분선이 밑변을 수직이등분하면 이등변삼각형이므로 명제는 참이지만 역은 거짓이다.

10. $a \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이고, $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건은 $0 \le x \le b$ 이다. 이때, a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은?

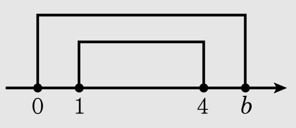
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(i) $0 \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이므로 다음 그림에서 $1 \le a \le 3$
따라서, a 의 최솟값은 1이다.



(ii) $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건이 $0 \le x \le b$ 이므로 다음 그림에서 $b \ge 4$



따라서, b 의 최솟값은 4이다.
(i), (ii) 에서 a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은 $1 \times 4 = 4$

11. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(가) p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
(나) q 는 r 이기 위한 필요조건이다.
(다) r 는 p 이기 위한 필요조건이다.
(라) s 는 p 이기 위한 충분조건이다.
이때, p 는 r 이기 위한 (㉠) 조건이고, r 는 s 이기 위한 (㉡) 조건이다.

㉠, ㉡에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

① 필요, 충분　② 충분, 필요
③ 필요충분, 충분　④ 필요, 필요충분
⑤ 필요충분, 필요

해설

(가) $p \Leftrightarrow q$, (나) $r \Rightarrow q$
(다) $p \Rightarrow r$, (라) $s \Rightarrow p$
따라서, $p \Leftrightarrow r$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요충분조건이고, $s \Rightarrow r$ 이지만 $r \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없으므로 r 는 s 이기 위한 필요조건이다.

12. $a>0,\ b>0$ 일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\times\left(b+\frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0, b>0$ 이므로 산술기하 평균의 관계에 의해

$$(\text{준식}) = ab+4+1+\frac{4}{ab} \geq 2\cdot\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5$$
$$= 2\cdot 2+5 = 9$$

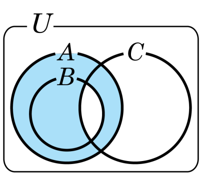
13. 집합 $A = \{x \mid x$는 15 이하의 3의 배수$\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 짝수인 집합 A 의 부분집합의 개수는?

① 6 개　② 12 개　③ 18 개　④ 24 개　⑤ 30 개

해설

$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$ 적어도 하나는 짝수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 홀수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면되므로 $2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$ (개) 이다.

14. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

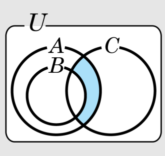


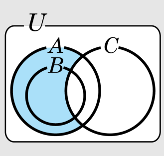
① $A-(B\cap C)$　　② $(A-B)\cap C$

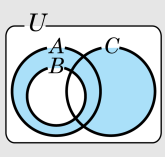
③ $(A\cup B)-C$　　④ $(A\cup C)-B$

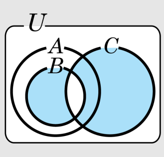
⑤ $(A\cap B)\cup C$

해설

②


③


④


⑤


15. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, B 에 대하여 집합 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \{1, 2, 9\}$ 를 만족하는 집합 B 는?

① $\{2, 3, 4\}$　② $\{3, 4, 5\}$　③ $\{3, 4, 5, 6\}$

④ $\{3, 4, 5, 7\}$　⑤ $\{3, 4, 5, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 9\}$ 이므로 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$ 이다.

따라서 집합 $B = \{3, 4, 5, 9\}$ 이다.

16. 어느 반 학생 50명이 A, B두 문제를 푼 결과는 다음과 같다.

> ㉠ 문제를 맞힌 학생은 40명이다.
>
> ㉡ A 문제만 맞힌 학생수는 A와 B를 모두 맞힌 학생수보다 10명이 작다.
>
> ㉢ B 문제만 맞힌 학생수는 두 문제 모두 틀린 학생수의 4 배이다.

이 때, A, B 두 문제를 모두 맞힌 학생과 모두 틀린 학생 수의 합은?

① 2 ② 17 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$n(U) = 50,\ n(A) = 40$
$n(A - B) = n(A \cap B) - 10$
$n(B - A) = 4n(A^c \cap B^c)$
$n(A \cap B) = x,\ n(A^c \cap B^c) = y$ 라고 하면
$40 - x = x - 10,\ x = 25$
$10 - y = 4y,\ y = 2$
$x + y = 27$

17. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 'ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.' 를 증명한 것이다.

> a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m-1, b = 2n-1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
> $ab = (2m-1)(2n-1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
> $= 2(2mn - m - n) + 1$
> 이때, $2mn - m - n$이 $\boxed{}$' 이므로, ab 는 $\boxed{}$이다.
> 따라서, 'a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.' 는 참이고 이것은 주어진 명제의 $\boxed{}$이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① 자연수, 홀수, 역
② 정수, 짝수, 대우
③ 정수, 홀수, 대우
④ 유리수, 짝수, 이
⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면
$a = 2m-1, b = 2n-1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} ab = (2m-1)(2n-1) &= 4mn - 2m - 2n + 1 \\ &= 2(2mn - m - n) + 1 \end{aligned}$$

이때, $2mn - m - n$ 이 $\boxed{\text{정수}}$이므로 ab 는 $\boxed{\text{홀수}}$이다. 이것은 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

18. 집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 홀수가 하나만 속하는 것을 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_n$이라 하고, $A_k(k=1,\ 2, \cdots, n)$의 원소의 합을 S_k라고 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$의 값은?

① 216　② 240　③ 672　④ 696　⑤ 728

해설

집합 S 에 홀수 1, 3, 5 가 있으므로 홀수를 하나만 포함하는 부분집합의 개수를 구할 때,1을 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$㉠
3을 포함하고 1, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$㉡
5를 포함하고 1, 3 을 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$㉢
이므로 모두 24 개이다. 이 24개의 부분집합의 열을 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_{24}$ 라 하면 $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots, A_{24}$ 에는 S 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 이 각각 몇 개씩 들어갈까? 우선 1 을 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개이므로 1이 8번 들어가는 것은 분명하다. 그러면 3, 5 는 들어가지 않으니 문제 삼지 말고 2, 4, 6 은 몇 번 들어갈까?
구체적으로 나열하면$\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,4,6\}$, $\{1,2,4,6\}$이 되어 2, 4, 6 은 각각 4번씩 들어간다. 따라서 ㉠의 8개의 집합 안에는 1이 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩㉡의 8개의 집합 안에는 3이 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩㉢의 8개의 집합 안에는 5가 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩 들어가므로
$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{24}=8(1+3+5)+12(2+4+6)=216$
그런데, 여기서 원소의 총합에 대한 규칙성을 발견해 보면 2, 4, 6 이 각각 4번씩 나오는데 그 이유를 알아보자.1을 반드시 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합 중에서 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 1, 2, 3, 5 를 제외한 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-4}=4$ (개)이다.

19. 전체집합U 의 두 부분집합A, B 에 대하여 연산 ★를$A★B = (A - B) \cup (B - A)$ 로 정의할 때,<보기>중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $A★B = B★A$

ㄴ $(A★B)★C = A★(B★C)$

ㄷ $A^c★B^c = A★B$

ㄹ $A★A★A = A$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

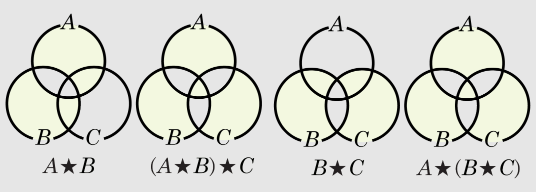
해설

ㄱ $A★B = (A - B) \cup (B - A)$,

$B★A = (B - A) \cup (A - B)$

$\therefore\ A★B = B★A$

ㄴ 연산 ★은 두 집합의 합집합에서 교집합을 빼는 것이므로 벤다이어그램을 그려서 확인해 보면 결합법칙이 성립함을 알 수 있다.



ㄷ $A^c★B^c = (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c)$

$= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$

$= (B - A) \cup (A - B)$

$= A★B$

ㄹ $A★A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing$,

$A★A★A = \varnothing★A = (\varnothing - A) \cup (A - \varnothing) = A$

$\therefore$ 모두 옳다.

20. 두 이차방정식 $x^2-ax+b=0$과 $x^2-bx+a=0$이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b의 값을 정할 때, $x^2-ax+b=0$의 두 근을 α,β, $x^2-bx+a=0$의 근을 γ, σ라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,

$\alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$를 만족한다.

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$, $\gamma+\sigma=b$,

$\gamma\sigma=a(a,b>0)$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{9(\gamma+\delta)}{\gamma\delta}$

$=\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{9b}{a}}=6$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{9}{\gamma}+\frac{9}{\sigma}\geq 6$