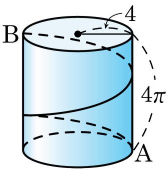
1. 다음 그림은 밑면의 반지름의 길이가 4 이고, 높이가 4π 인 원통이다. 그림과 같이 A 에서 B 까지 실로 원통을 한 바퀴 반 감아서 연결할 때, 실의 길이의 최소값을 구하면?

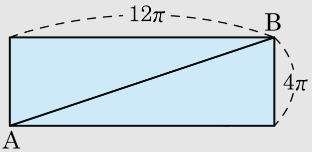


① $8\sqrt{2}\pi$ ② 6π ③ 10π

④ 8π ⑤ $4\sqrt{10}\pi$

해설

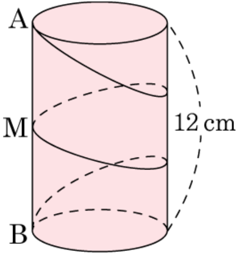
실의 길이의 최솟값은 실을 팽팽히 잡아당길 때이다. 전개도를 그려 보면 다음과 같다.



따라서, 실의 길이의 최솟값은 $\overline{AB}$ 의 길이와 같다.

$\therefore\ \overline{AB} = \sqrt{(12\pi)^2 + (4\pi)^2} = 4\sqrt{10}\pi$

2. 다음 그림과 같이 높이가 $12\,\text{cm}$ 인 원기둥이 있다. 점 A에서 옆면을 따라 $\overline{AB}$ 의 중점 M을 지나 점 B 에 이르는 최단 거리가 $20\,\text{cm}$ 일 때, 이 원기둥의 밑면의 둘레의 길이를 구하여라.



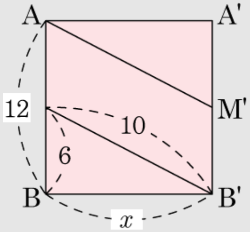
▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 8 cm

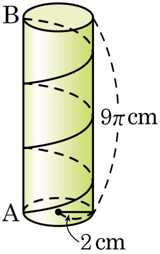
해설

$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

따라서 밑면의 둘레는 $8(\text{cm})$



3. 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 $2\,\mathrm{cm}$, 높이가 $9\pi\,\mathrm{cm}$ 인 원기둥이 있다. 점 A 에서 점 B 까지 표면을 따라 세 바퀴 감았을 때, 실의 최소 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 15π cm

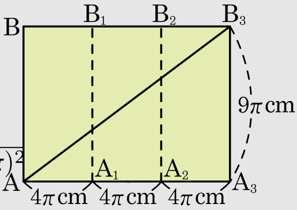
해설

밑면의 둘레의 길이는 $2\pi \times 2 = 4\pi\ (\mathrm{cm})$

다음 전개도에서 구하는 실의 길이는 $\overline{\mathrm{AB_3}}$ 의 길이이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB_3}} = \sqrt{(4\pi + 4\pi + 4\pi)^2 + (9\pi)^2}$

$= \sqrt{225\pi^2} = 15\pi\ (\mathrm{cm})$



4. 어떤 전자제품 회사에서 기존에 가로가 16 인치이고 가로와 세로의 비율이 4 : 3 인 모니터만을 생산하다가, 디자인적인 측면을 강화하기 위해 대각선의 길이는 유지하면서 가로와 세로의 비율이 $6 : \sqrt{14}$ 인 모니터를 생산하였다. 새로운 모니터의 가로와 세로의 길이를 각각 $a\sqrt{b}$, $c\sqrt{d}$ 라고 할 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하시오. (단, b, d는 최소의 자연수)

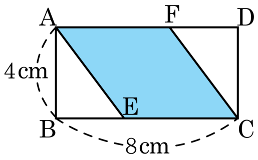
▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

가로가 16 인치이고 가로와 세로의 비율이 4 : 3 인 모니터의 대각선의 길이는 20 인치이다.
새로운 모니터의 가로의 길이를 $6x$, 세로의 길이를 $\sqrt{14}\,x$ 라고 하면
피타고라스 정리에 따라
$(6x)^2 + (\sqrt{14}x)^2 = 20^2$
$50x^2 = 400$
$x > 0$ 이므로 $x = 2\sqrt{2}$
따라서 가로의 길이는 $6 \times 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$(인치)
세로의 길이는 $\sqrt{14} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{7}$(인치)
이므로 $a+b+c+d = 25$ 이다.

5. 다음 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AE}=\overline{CE}$ 가 되도록 점 E 를 잡고, $\overline{AE}=\overline{AF}$ 가 되도록 점 F 를 잡을 때, □AECF 의 넓이를 구하여라.



▶ **답 :** ______ cm^2

▷ **정답 :** $20\,cm^2$

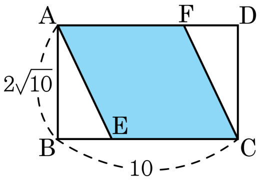
해설

$\overline{CE}=x(cm)$ 라 하면

$x^2=4^2+(8-x)^2 \quad \therefore \ x=5$

$\therefore$ □AECF $=5\times4=20(cm^2)$

6. 다음 직사각형 ABCD 에서 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{CE}}$ 가 되도록 점 E 를 잡고, $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AF}}$ 가 되도록 점 F 를 잡을 때, □AECF 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $14\sqrt{10}$

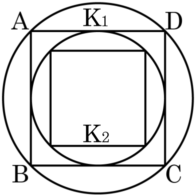
해설

$\overline{\mathrm{CE}} = x$ 라 하면

$x^2 = (2\sqrt{10})^2 + (10 - x)^2 \quad \therefore \; x = 7$

$\therefore$ □AECF $= 7 \times 2\sqrt{10} = 14\sqrt{10}$

7. 그림과 같이 지름의 길이가 $20\,\mathrm{cm}$ 인 원에 내접하는 정사각형을 $\mathrm{K_1}$ 이라 할 때, $\mathrm{K_1}$ 에 내접하는 원에 또 다시 내접하는 정사각형 $\mathrm{K_2}$ 의 한 변의 길이는 얼마인가?



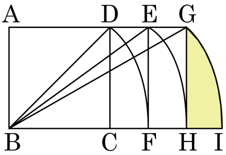
▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $10\,\mathrm{cm}$

해설

지름의 길이가 $20\,\mathrm{cm}$ 이므로 사각형 ABCD 의 대각선의 길이는 $20\,\mathrm{cm}$ 이므로 정사각형 ABCD 의 한 변의 길이는 $10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ 이다.
정사각형 ABCD 의 한 변의 길이는 안에 내접하는 작은 원의 지름이므로 작은 원의 지름은 $10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ 이고, 작은 원의 지름은 $\mathrm{K_2}$ 의 대각선의 길이와 같다.
따라서 $\mathrm{K_2}$ 는 대각선의 길이가 $10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ 인 정사각형이므로 $\mathrm{K_2}$ 의 한 변의 길이는 $10\,\mathrm{cm}$ 이다.

8. 다음 정사각형 ABCD 에서 $\overline{BD}=\overline{BF}$, $\overline{BE}=\overline{BH}$, $\overline{BG}=\overline{BI}$ 이고, $\overline{AB}=3$, $\angle GBI=30°$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $3\pi-\frac{9}{2}\sqrt{3}$

해설

$\overline{BG}=\sqrt{3^2+3^2+3^2+3^2}=6$ 이다.

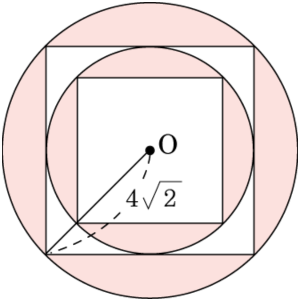
색칠한 부분의 넓이를 구하기 위해서 부채꼴의 넓이를 구하면

$\frac{30°}{360°}\times6\times6\times\pi=3\pi$ 에서 삼각형 GBH 의 넓이를 빼면 된다.

$\overline{BH}=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$ 이므로 넓이는 $3\sqrt{3}\times3\times\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 구하는 부분의 넓이는 $3\pi-\frac{9}{2}\sqrt{3}$ 이다.

9. 다음 그림과 같이 크기가 다른 원과 정사각형들이 서로 연이어 접하고 있다. 바깥쪽 큰 원의 반지름이 $4\sqrt{2}$ 일 때, 색칠한 부분의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $32 + 16\sqrt{2} + (8\sqrt{2} + 8)\pi$

해설

큰 정사각형의 대각선의 길이는 큰 원의 지름과 같으므로 $8\sqrt{2}$ 이다. 큰 정사각형의 한 변의 길이를 x(cm) 라 하면

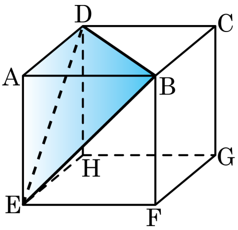
$1 : \sqrt{2} = x : 8\sqrt{2} \quad \therefore \ x = 8$

작은 원의 지름은 큰 정사각형의 한 변의 길이와 같으므로 8 이고, 작은 정사각형의 대각선의 길이는 작은 원의 지름과 같다. 따라서, 작은 정사각형의 한 변의 길이를y 라 하면

$1 : \sqrt{2} = y : 8 \quad \therefore \ y = 4\sqrt{2}$

색칠한 부분의 둘레는 $8\sqrt{2}\pi + 8\pi + 8 \times 4 + 4 \times 4\sqrt{2} = 32 + 16\sqrt{2} + (8\sqrt{2} + 8)\pi$ 이다.

10. 한 모서리의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 정육면체를 다음 그림과 같이 잘랐을 때, 사면체 A – DEB 의 겉넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $48+16\sqrt{3}$

해설

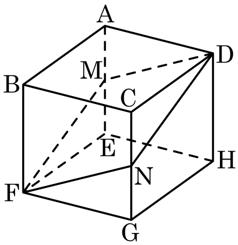
$\triangle$DEB 는 한 변의 길이가 8 인 정삼각형이므로

$$(\triangle\text{DEB의 넓이}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2 = 16\sqrt{3}$$

$$\therefore\ (\text{A} - \text{DEB의 겉넓이}) = 3\triangle\text{ABE} + 16\sqrt{3}$$

$$= 48 + 16\sqrt{3}$$

11. 다음 그림과 같은 한 변의 길이가 6인 정육면체에서 $\overline{AE}$의 중점을 M, $\overline{CG}$의 중점을 N이라 할 때, □MFND의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $18\sqrt{6}$

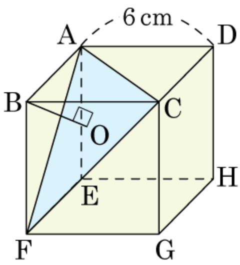
해설

$\overline{MN} = \overline{AC} = 6\sqrt{2}$

$\overline{DF} = 6\sqrt{3}$,

□MFND 의 넓이 : $6\sqrt{3} \times 6\sqrt{2} \times \dfrac{1}{2} = 18\sqrt{6}$

12. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6cm 인 정육면체의 꼭짓점 B 에서 삼각형 AFC 에 내린 수선의 발을 O 라 할 때, $\overline{BO}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{3}$

해설

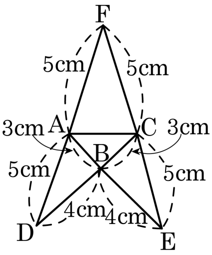
삼각뿔 F−ABC 의 부피는 $\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{BF} = \frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times6\times6)\times6 = 36(cm^3)$

$\triangle AFC$ 는 한 변의 길이가 $6\sqrt{2}$cm 인 정삼각형이므로 $\triangle AFC = \frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{2})^2 = 18\sqrt{3}(cm^2)$

삼각뿔 B−AFC 의 부피는 $\frac{1}{3}\times\triangle AFC\times\overline{BO} = \frac{1}{3}\times18\sqrt{3}\times\overline{BO} = 6\sqrt{3}\times\overline{BO}$

따라서 $6\sqrt{3}\times\overline{BO} = 36$ 이므로 $\overline{BO} = 2\sqrt{3}$(cm) 이다.

13. 다음 그림과 같은 전개도를 가지는 삼각뿔의 부피를 구하여라.

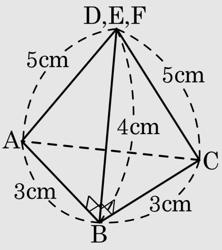


▶ 답 :

▷ 정답 : 6

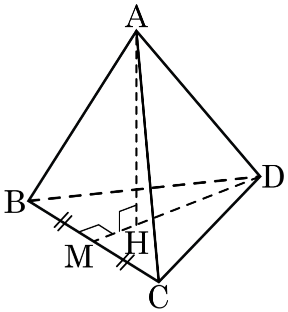
해설

$3^2 + 4^2 = 5^2$ 이므로 $\triangle ADB$ 와 $\triangle BEC$ 는 $\angle ABD = \angle CBE = 90°$ 인 직각삼각형이다.



$$(\text{삼각뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times \overline{DB}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3^2 \times 4 = 6$$

14. 다음 그림은 한 모서리의 길이가 12cm 인 정사면체이다. 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이고 $\overline{AH}$는 정사면체의 높이일 때, △AMH 의 넓이를 구하여라.



① $12\sqrt{2}\text{cm}^2$　② $13\sqrt{2}\text{cm}^2$　③ $14\sqrt{2}\text{cm}^2$

④ $15\sqrt{2}\text{cm}^2$　⑤ $16\sqrt{2}\text{cm}^2$

해설

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 12 = 4\sqrt{6}(\text{cm})$$

$$\overline{MH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 \times \frac{1}{3} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$(\therefore \ \triangle\text{AMH의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 4\sqrt{6} = 12\sqrt{2}$$

15. 한 변의 길이가 3 인 정사면체의 높이와 부피를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : (높이) $= \sqrt{6}$

▷ 정답 : (부피) $= \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$

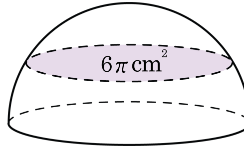
해설

한 변의 길이가 a 인 정사면체에서

$$(\text{높이}) = \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 3 = \sqrt{6}$$

$$(\text{부피}) = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 3^3 = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

16. 다음 반구에서 반지름의 $\frac{1}{2}$ 지점을 지나고 밑면에 평행하게 자른 단면의 넓이가 $6\pi\text{cm}^2$ 일 때, 반구의 겉넓이를 구하면?



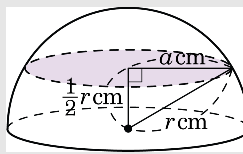
① $6\pi\,\text{cm}^2$　② $12\pi\,\text{cm}^2$　③ $18\pi\,\text{cm}^2$

④ $24\pi\,\text{cm}^2$　⑤ $30\pi\,\text{cm}^2$

해설

밑면에 평행하게 자른 단면의 넓이가 $6\pi\,\text{cm}^2$ 이므로 단면의 반지름의 길이를 $a\,\text{cm}$ 라고 하면 $\pi a^2 = 6\pi$, $a^2 = 6$

$\therefore\ a = \sqrt{6}$



반구의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$ 라고 하면 $r^2 = \left(\frac{1}{2}r\right)^2 + a^2$,

$\frac{3}{4}r^2 = 6$, $r^2 = 8$

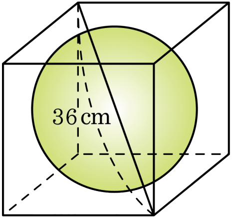
반구의 겉넓이 $=$ 구의 겉넓이 $\times \frac{1}{2}$ $+$ 밑면의 넓이

구의 겉넓이 $\times \frac{1}{2} = 4\pi r^2 \times \frac{1}{2} = 4\pi \times 8 \times \frac{1}{2} = 16\pi(\text{cm}^2)$

밑면의 넓이 $= \pi r^2 = \pi \times 8 = 8\pi(\text{cm}^2)$

따라서 반구의 겉넓이는 $16\pi + 8\pi = 24\pi(\text{cm}^2)$ 이다.

17. 대각선 길이가 36 cm 인 정육면체 안에 꼭 맞는 구가 있다. 이 구의 부피를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm^3

▷ 정답 : $864\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$

해설

정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\sqrt{3}a = 36 \qquad \therefore\ a = 12\sqrt{3}\ (\text{cm})$

(구의 반지름의 길이) $= 6\sqrt{3}\ (\text{cm})$

(구의 부피) $= \dfrac{4}{3}\pi \times \left(6\sqrt{3}\right)^3 = 864\sqrt{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$

18. 구의 중심에서 구의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$ 만큼 떨어진 평면으로 구를 자를 때 생기는 단면의 반지름이 4cm 이다. 이때 구의 겉넓이는?

① $\frac{32}{3}\pi\,\text{cm}^2$ ② $\frac{64}{3}\pi\,\text{cm}^2$ ③ $\frac{128}{3}\pi\,\text{cm}^2$

④ $\frac{256}{3}\pi\,\text{cm}^2$ ⑤ $\frac{512}{3}\pi\,\text{cm}^2$

해설

구의 반지름의 길이를 2 cm 라 하면

$(2a)^2 = 4^2 + a^2$

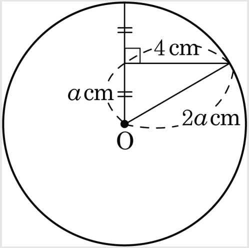
$4a^2 = 16 + a^2$

$\therefore a^2 = \frac{16}{3}$

구의 겉넓이는 $4\pi r^2$ 이므로

$4\pi r^2 = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2$ $\left(a^2 = \frac{16}{3}\right.$ 대입)

$16\pi a^2 = 16\pi \times \frac{16}{3} = \frac{256}{3}\pi(\text{cm}^2)$



19. $45\,^{\circ} \leq \mathrm{A} < 90\,^{\circ}$ 이고 $\sqrt{(\sin A + \cos A)^2} + \sqrt{(\cos A - \sin A)^2} = \dfrac{30}{17}$ 을 만족하는 A 에 대해서 $\cos \mathrm{A} \times \tan \mathrm{A}$ 의 값을 구하여라.

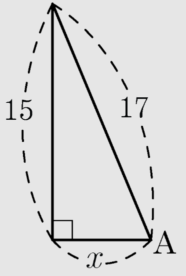
▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{15}{17}$

해설

$45\,^{\circ} \leq \mathrm{A} < 90\,^{\circ}$ 이므로 $0 < \cos\mathrm{A} \leq \sin\mathrm{A}$

$\therefore \sqrt{(\sin A + \cos A)^2} + \sqrt{(\cos A - \sin A)^2}$
$= \sin A + \cos A - \cos A + \sin A$
$= 2\sin A = \dfrac{30}{17}$
$\therefore \sin A = \dfrac{15}{17}$



그림에서 $x = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ 이므로

$\cos \mathrm{A} = \dfrac{8}{17}, \tan \mathrm{A} = \dfrac{15}{8}$

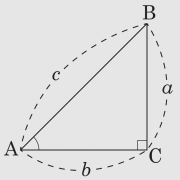
$\therefore \cos A \times \tan A = \dfrac{8}{17} \times \dfrac{15}{8} = \dfrac{15}{17}$

20. $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $2\sin A = \cos A$ 일 때, $\sin B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

해설



$\sin A = \dfrac{a}{c}, \cos A = \dfrac{b}{c}, \tan A = \dfrac{a}{b}$ 이다.

$2\sin A = \cos A$ 이므로 $\dfrac{2a}{c} = \dfrac{b}{c}$ 이다.

$\Rightarrow 2a = b$, $c = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$

따라서 $\sin B = \dfrac{b}{c} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}a} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

21. $\tan A = \dfrac{1}{2}$ 일 때, $\dfrac{\sin A + 2\cos A}{\sin A - \cos A}$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 3 ③ 1 ④ -1 ⑤ -5

해설

주어진 식의 분모, 분자를 각각 $\cos A$ 로 나눈 후, $\dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A$ 로 고치면

$$\frac{\tan A + 2}{\tan A - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{5}{2} \times (-2) = -5$$ 이다.