

1. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 7, a, b\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $a + b$ 의 값은?
(단, $a < b$)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 A, B 의 모든 원소가 같아야 하므로 두 집합의 원소를 비교하면 $a = 1$, $b = 5$ 이다. 따라서 $a + b = 6$ 이다.

2. $U = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{보다 작은 자연수}\}$ 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B^c = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$ 일 때, $A^c - B$ 은?

- ① {4}
- ② {5}
- ③ {4, 5}
- ④ {4, 5, 7}
- ⑤ {4, 5, 7, 8}

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B^c = \{2, 4, 6\}$
이므로
 $A^c - B = \{4, 5, 7\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{4\}$ 이다.

3. 다음 중 옳은 것은?

① $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cup C)$

② $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이면 $A \subset B$

③ $(A - B)^c = A^c \cup B$

④ $A \subset B$ 이면 $(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) = A \cap B^c$

⑤ $(A^c - B^c)^c = A - B$

해설

① $(A - B) \cup (A - C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = A \cap (B^c \cup C^c) = A \cap (B \cap C)^c = A - (B \cap C)$

② $A = B$

③ $(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$

④ $A \subset B$ 이면, $(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) = (A \cap B)^c \cap (A \cup B) = A^c \cap B$

⑤ $(A^c - B^c)^c = (A^c \cap B)^c = A \cup B^c$

4. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 보기 중 함수 $f : X \rightarrow X$ 로 가능한 것의 개수는 몇 개인가?

보기

- ㉠ $f(x) = -x$
- ㉡ $f(x) = x^2$
- ㉢ $f(x) = |x|$
- ㉤ $f(x) = \frac{1}{x}$
- ㉥ $f(x) = \sqrt{x}$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ $f(x) = -x$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = -1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉡ $f(x) = x^2$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = 1 \in X$ 따라서 함수이다.

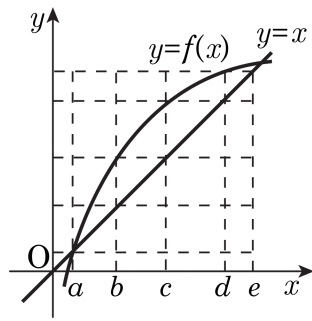
㉢ $f(x) = |x|$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = 1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉤ $f(x) = \frac{1}{x}$ 에서 $f(0)$ 이 정의되지 않으므로 함수가 아니다.

㉥ $f(x) = \sqrt{x}$ 에서 $f(-1) = i \notin X$ 이므로 함수가 아니다.

따라서 함수로 가능한 것은 ㉠, ㉡, ㉢의 3개다.

5. 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 의 그래프를 이용하여 $g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$ 의 값을 구하면?



- ① a
- ② c
- ③ $a + b - c$
- ④ $a + c - e$
- ⑤ $a + b + c - d - e$

해설

$$\begin{aligned} f(d) = e, f(c) = d, f(b) = c, f(a) = a \\ \Rightarrow g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e) \\ \therefore a + c + d - c - d = a \end{aligned}$$

6. 다음 중 $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ 을 간단히 한 것은?

① $\frac{2}{13}$

② $\frac{4}{13}$

③ $\frac{5}{14}$

④ $\frac{23}{30}$

⑤ $\frac{31}{42}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \\ &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

7. $a + \frac{1}{b} = c$, $b + \frac{1}{c} = d$, $c + \frac{1}{d} = a$ 일 때, ab 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$c = a + \frac{1}{b}$ 을 $b + \frac{1}{c} = d$ 에 대입하면

$$d = b + \frac{1}{a + \frac{1}{b}} = b + \frac{b}{ab + 1} = \frac{ab^2 + 2b}{ab + 1}$$

c 와 d 를 $a = c + \frac{1}{d}$ 에 대입하면

$$a = a + \frac{1}{b} + \frac{ab + 1}{ab^2 + 2b} \text{ 에서 } \frac{ab + 2 + ab + 1}{ab^2 + 2b} = 0$$

$$\therefore \frac{2ab + 3}{ab^2 + 2b} = 0$$

따라서 $2ab + 3 = 0$ 이므로 $ab = -\frac{3}{2}$

8. $\frac{3x-2y}{x} = \frac{3x-4y}{y}$ 일 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면? (단, $x > y > 0$)

① -1

② 1

③ 2

④ -2

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$(3x-2y)y = x(3x-4y)$$

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0,$$

$$(3x-y)(x-2y) = 0$$

$$x > y > 0 \text{ 이므로 } x = 2y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

9. $-1 < a < 3$ 일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt{a^2+2a+1}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{a^2-6a+9}$$

- ① a

② $a-2$

③ 4
- ④ $3a+2$

⑤ $a+2$

해설

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a+1)^2}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{(a-3)^2}\\&=|a+1|+(a-2)+|a-3|\\&=(a+1)+(a-2)-(a-3)\\&=a+1-2+3=a+2\end{aligned}$$

10. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 의 소수 부분을 각각 a , b 라고 할 때, $\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하면?

- ① $\sqrt{15} - 3\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15} + 3\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{15} + 2\sqrt{5}$
④ $\sqrt{15} - 2\sqrt{5}$ ⑤ $-\sqrt{15} + 3\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned} 1 < \sqrt{3} < 2 \text{에서 } \sqrt{3} &= 1 + a \\ \therefore a &= \sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \text{에서 } \sqrt{5} &= 2 + b \\ \therefore b &= \sqrt{5} - 2 \\ a - \frac{1}{a} &= \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 3}{2} \\ b + \frac{1}{b} &= \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \\ &= \sqrt{5} - 2 + \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = 2\sqrt{5} \\ \therefore \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) &= \frac{\sqrt{3} - 3}{2} \cdot 2\sqrt{5} \\ &= \sqrt{15} - 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

11. $x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 일 때, $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

해설

$$x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore x+y = \sqrt{5}, x-y = 1$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

12. 분수함수 $y = \frac{x+k-1}{x-1}$ ($k \neq 0$) 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 치역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.
- ② (1, 1)에 대하여 대칭이다.
- ③ $|k|$ 가 클수록 곡선은 (1, 1)에 가까워진다.
- ④ 점근선은 $x = 1, y = 1$ 이다.
- ⑤ $y = -x + 2$ 에 대하여 대칭이다.

해설

- ① 정의역은 $x \neq 1$ 인 실수, 치역은 $y \neq 1$ 인 실수
- ② 점근선의 교점인 (1, 1) 에 대해 대칭이다.
- ③ $|k|$ 가 커질 수록 (1, 1)에 멀어진다.
- ⑤ 기울기가 ± 1 이고 (1, 1)을 지나는 직선에 대칭이다.

13. $y = \frac{x+a}{x+1}$ 의 그래프를 x 축 및 y 축의 방향으로 평행이동 하면 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐질 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+a}{x+1} = \frac{x+1+a-1}{x+1} = 1 + \frac{a-1}{x+1} \text{을 평행이동하여}$$

$$y = \frac{1}{x} \text{과 겹치려면 } a-1=1$$

$$\therefore a=2$$

14. $f(x) = \frac{ax+b}{x+2}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 $f^{-1}(x) = f(x)$ 가 성립할 때 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = \frac{ax+b}{x+2}$ 에서 $y = \frac{ax+b}{x+2}$ 로 놓고 역함수를 구해보면

$$y(x+2) = ax+b, yx+2y = ax+b$$

$$x(y-a) = b-2y, x = \frac{b-2y}{y-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{b-2x}{x-a}$$

$f^{-1}(x) = f(x)$ 이므로

$$\frac{b-2x}{x-a} = \frac{ax+b}{x+2}$$

$$\therefore a = -2$$

따라서 $f(x) = \frac{-2x+b}{x+2}$ 가 점 $(1,1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{-2+b}{1+2}, 1 = \frac{-2+b}{3}$$

$$\therefore b = 5$$

$$\therefore a+b = -2+5 = 3$$

15. $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2 (x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x - 1}$ 에서 $\sqrt{x - 1} \geq 0$ 이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y - 2)^2 = x - 1$

$\therefore x = y^2 - 4y + 5 (y \geq 2)$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

16. 1과 10 사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열
 $1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$
 $1, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$
 이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1}$ 의 값은?

- ① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{11}{21}$ ③ $\frac{20}{11}$ ④ $\frac{21}{11}$ ⑤ 2

해설

$1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$ 의 공차를 p 라 하면 $1 + 11p = 10 \Rightarrow$

$$p = \frac{9}{11}$$

$1, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$ 의 공차를 q 라 하면 $1 + 21q = 10 \Rightarrow$

$$q = \frac{9}{21}$$

$$\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1} = \frac{9p}{9q} = \frac{p}{q} = \frac{\frac{9}{11}}{\frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

17. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = b_1$, $a_5 = b_7$, $b_{22} = 10$ 일 때, $a_k = 10$ 을 만족시키는 양의 정수 k 의 값은? (단, $a_1 \neq 10$)

- ① 12 ② 14 ③ 15 ④ 21 ⑤ 22

해설

$\{a_n\}$ 의 공차를 x , $\{b_n\}$ 의 공차를 y 라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)x$$

$$b_n = b_1 + (n-1)y$$

$$a_1 + 4x = b_1 + 6y$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x$$

$$b_{22} = b_1 + 21y = 10$$

$$a_k = a_1 + (k-1)x = 10$$

$$a_1 = b_1 \text{ 이므로 } a_1 = 10 - 21y$$

$$10 - 21y + (k-1)x = 10$$

$$y = \frac{2}{3}x \text{ 이므로}$$

$$10 - 14x + (k-1)x = 10$$

$$-14x + (k-1)x = 0$$

$$(k-15)x = 0$$

$$(i) \ x \neq 0 \text{ 일 때, } k = 15$$

$$(ii) \ x = 0 \text{ 일 때 } y = 0 \text{ 이므로 } b_{22} = \cdots = b_1 = 10$$

$$b_1 = a_1 \text{ 이므로 } a_1 = 10$$

그런데 $a_1 \neq 10$ 이 아니므로

$x = 0$ 이 될 수 없다.

$$\therefore k = 15$$

18. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + 2n + \alpha$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 α 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$S_n = 2n^2 + 2n + \alpha$$

$$S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 2(n-1) + \alpha$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 + 2n + \alpha - (2n^2 - 4n + 2 + 2n - 2 + \alpha)$$

$$= 4n \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 \text{ 이므로}$$

$$4 = 4 + \alpha$$

$$\therefore \alpha = 0$$

19. 첫째항부터 제3항까지의 합이 28, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 252
인 실수로 이루어진 등비수열의 제10항은?

- ① 2^7 ② 2^8 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{11}

해설

첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하고, 이 등비수열의 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 28 \dots\dots\dots \textcircled{A}$$
$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 252 \dots\dots\dots \textcircled{B}$$

②을 변형하면

$$\frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 252,$$
$$\frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} \cdot (r^3 + 1) = 252$$

위의 식에 ①을 대입하면

$$28(r^3 + 1) = 252, \quad r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$$

r 는 실수이므로 $r = 2 \dots\dots\dots \textcircled{C}$

③을 ①에 대입하면 $7a = 28 \quad \therefore a = 4$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 4, 공비는 2이다.

$$\therefore a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2^{11}$$

20. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

- ① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의

최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n-1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

21. 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 a , b , c 인 직육면체에 대하여 a , b , c 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 60, 겹넓이가 180 일 때, 이 직육면체의 부피는?

① 174 ② 188 ③ 202 ④ 216 ⑤ 230

해설

등비수열 a , b , c 의 공비를 r 이라 하면 가로 길이, 세로 길이, 높이는 각각 a , ar , ar^2 이다.

모서리의 길이의 총합은 $4(a + ar + ar^2) = 60$ 에서

$$a(1 + r + r^2) = 15 \cdots \textcircled{1}$$

또, 겹넓이는 $2(a \cdot ar + a \cdot ar^2 + ar \cdot ar^2) = 180$ 에서

$$a^2r(1 + r + r^2) = 90 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ 에서 } ar = 6$$

따라서 직육면체의 부피 V 는

$$V = a \cdot ar \cdot ar^2 = a^3r^3 = (ar)^3 = 6^3 = 216$$

22. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n + k$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$S_n = 2 \cdot 3^n + k \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 + k = 6 + k$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k) \\ &= 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1) \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이 등비수열이 되려면

$$\frac{a_2}{a_1} = 3 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } a_2 = 4 \cdot 3^{2-1} = 12 \text{이므로 } \frac{12}{6+k} = 3$$

$$\therefore k = -2$$

23. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A \cup B = B \cup A$

② $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$

③ $A \cap A = \emptyset$

④ $B \cap \emptyset = \emptyset$

⑤ $A \subset (A \cup B)$

해설

③ $A \cap A = A$

24. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 일 때, $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$A \cap X = X$ 이므로 $X \subset A$

$(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$

$\therefore (A \cap B) \subset X \subset A$

$(A \cap B) = \{2, 4\}$ 이므로 x 는 원소 2, 4 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.

$\therefore 2^{4-2} = 2^2 = 4$

25. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 3\}$, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 을 만족시키는 집합 B 의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= B - A \end{aligned}$$

따라서 $A - B \subset B - A$, $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로 소이므로

$$A - B = \phi, \quad A \subset B$$

$\therefore B$ 는 2, 3을 포함하는 U 의 부분집합이므로 B 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

26. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $(A - B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$A = \{x \mid x \text{는 } 8\text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 5\text{이하의 홀수}\}$

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

$(A - B) \cap X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $\{2, 4, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$
집합 X 는 집합 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.
 $\therefore 2^{6-3} = 2^3 = 8(\text{개})$

27. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 Δ 를 $A\Delta B = (A \cap B^c)^c$ 로 정의할 때, 다음 중 $(A\Delta B)\Delta B$ 와 같은 것은?

- ① $A \cup B$ ② $A \cap B$ ③ $A - B$ ④ A ⑤ B

해설

$$A\Delta B = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

$$\begin{aligned}\therefore (A\Delta B)\Delta B &= (A^c \cup B)^c \cup B = (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = A \cup B\end{aligned}$$

28. 다음은 ‘ x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.’를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가)이면 xy 도 (가)이다.’이다.
 $x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나)가 된다.
따라서, 대우가 (다)이므로 주어진 명제도 (다)이다.

- ① 짝수, 홀수, 참

② 짝수, 짝수, 참
- ③ 짝수, 짝수, 거짓

④ 홀수, 홀수, 참
- ⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.’이다.
 $x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

29. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

보기

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| ㉠ $ab = 0$ | ㉡ $a^2 + b^2 = 0$ |
| ㉢ $a^2 + b^2 > 0$ | ㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$ |
| ㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$ | ㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$ |
| ㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ | ㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$ |
| ㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ | |

- ① ㉠과 ㉤ ② ㉡와 ㉣ ③ ㉢과 ㉦
- ④ ㉤와 ㉧ ⑤ ㉢과 ㉨

해설

$ab \leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$
 $a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0$
 $a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
 $ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b \neq 0$

30. 전체집합 U 의 임의의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 <보기>의 (가), (나)에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

- (1) $A \subset B$ 는 $A - B = \emptyset$ 이 되기 위한 (가) 조건이다.
(2) $B = C$ 는 $A \cup B = A \cup C$ 이 되기 위한 (나) 조건이다.

- ① 필요, 필요충분 ② 필요, 필요
③ 필요충분, 필요충분 ④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요충분

해설

(1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B, A \supset C, B \subset C$ 이면 성립하지 않는다.

31. $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

1, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $\sqrt{b-a}$

- ① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$ ② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- ③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$ ④ $\sqrt{b-a} < 1$
- ⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
 $= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > 1$
 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
 $= (a+b) - b + a$
 $= 2a > 0$

$\therefore 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$
 $= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
 $= 2\sqrt{ab} - 2a$
 $= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$
 $\therefore \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

32. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H 에 대하여
적당한 실수 r 가 존재하여
 $a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$ 가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$ 이고 $\frac{a-H}{a} = \frac{b-H}{b} \cdots (B)$ 이므로
 $H = \frac{a+b}{2}$ 이다.
역으로, $a \neq b$ 인 양수 a, b 에 대하여
 $H = \frac{a+b}{2}$ 이면,
식 (B) 가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.
 (B) 에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{b-H}{b}$ 이라 놓으면
식 (A) 가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H 에 대하여 적당한 실수 r 이 존재하여
식 (A) 가 성립하기 위한 $(\Leftarrow)$ 조건은
 $a \neq b$ 이고 $H = \frac{a+b}{2}$ 이다.

위의 증명에서 $(\Leftarrow), (\Rightarrow), (\Leftarrow)$ 에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

- ① $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요충분}$
- ② $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{필요충분}$
- ③ $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{충분}$
- ④ $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요}$
- ⑤ $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{충분}$

해설

$a = H + \frac{a}{r}$ 에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$
 $H = b + \frac{b}{r}$ 에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$
 $\therefore \frac{a-H}{a} = \frac{H-b}{b}$
 $ab - bH = aH - ab$ 이므로 $H = \frac{a+b}{2}$
따라서 $(\Leftarrow)$ 필요충분조건

33. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 에 대하여 $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$

일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{99}$ ② $\frac{99}{100}$ ③ $\frac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.

즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

$$\text{따라서 } f_{100}(x) = f_{3 \times 33 + 1}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f_{100}(100) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

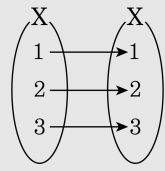
34. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$

즉 $f = I$ (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



35. $y = ||x + 2| - |x - 6||$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2 이상일 때, 정수 k 의 개수는?

- ① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$y = ||x + 2| - |x - 6|| = |f(x)|$ 이라하면

$y = f(x)$ 에서

절댓값 기호안의 값을 0 으로 하는

x 의 값이 $-2, 6$ 이므로

(i) $x < -2$ 일 때,

$$y = -(x + 2) + (x - 6) = -8$$

(ii) $-2 \leq x < 6$ 일 때,

$$y = x + 2 + (x - 6) = 2x - 4$$

(iii) $x \geq 6$ 일 때,

$$y = x + 2 - (x - 6) = 8$$

이상에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 [그림1] 과 같다.

이 때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림

1] 의

그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은

그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을

x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그

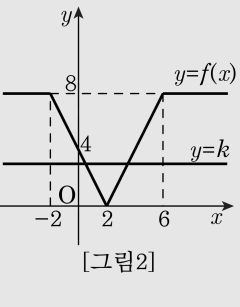
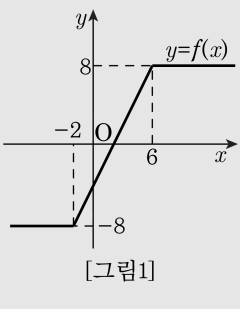
림2] 와 같다. [그림2] 에서 $y = |f(x)|$ 의

그래프와

직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2 이

상이기 위한 k 의 값의 범위는 $0 < k \leq 8$

따라서 구하는 정수 k 의 개수는 8 개이다.



36. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 는 $(x-3)(y-3)(z-3)=0$ 과 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ 을 모두 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

- ① 3 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(x-3)(y-3)(z-3)=0$ 을 전개하면
 $xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=0\cdots\textcircled{1}$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{3}$
 $\therefore 3(xy+yz+zx)=xyz\cdots\textcircled{2}$
②를 ①에 대입하면 $9(x+y+z)=27$
 $\therefore x+y+z=3$

37. $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

- ① 0 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ -1

해설

(분모의 합)

$$= (b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c) = a+b+c$$

i) $a+b+c \neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c-a} &= \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c} \\ &= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1\end{aligned}$$

ii) $a+b+c = 0$ 일 때,

$$b+c = -a, \quad c+a = -b, \quad a+b = -c \text{ 이므로}$$

$$\frac{a}{-a-a} = \frac{b}{-b-b} = \frac{c}{-c-c} = -\frac{1}{2}$$

i), ii) 에서 구하는 값은 1 또는 $-\frac{1}{2}$

∴ 분수식의 값들의 합은 $\frac{1}{2}$

38. $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 일 때, $x^3 - 2x^2 - 2x + 5$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{15}$

해설

$$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \text{에서 양변을 제곱하면}$$

$$x^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{9 - 5} + 3 - \sqrt{5} = 2$$

$$\therefore x^3 - 2x^2 - 2x + 5 = 2x - 4 - 2x + 5 = 1$$

39. 등식 $(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}\right) = (2^6 - m)^2$

을 만족하는 실수 m 의 값은?

- ① $\frac{1}{2^4}$
- ② $\frac{1}{2^5}$
- ③ $\frac{1}{2^6}$
- ④ $\frac{3}{2^5}$
- ⑤ $\frac{3}{2^6}$

해설

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$\therefore (2^{11} - 1) \left(2 - \frac{1}{2^{10}}\right)$$
$$= (2^{11} - 1) \cdot \frac{2^{11} - 1}{2^{10}} = \frac{(2^{11} - 1)^2}{2^{10}}$$
$$= \left(\frac{2^{11} - 1}{2^5}\right)^2 = \left(2^6 - \frac{1}{2^5}\right)$$
$$\therefore m = \frac{1}{2^5}$$

40. 매월 초에 일정한 금액을 월이율 1%, 한 달마다 복리로 적립하여 5년 후에 2000만원을 만들려고 한다. 매달 얼마씩 적립해야 하는가?(단, $1.01^{60} = 1.8$ 로 계산하고, 천 원 단위에서 반올림한다.)

- ① 22만원
- ② 24만원
- ③ 25만원
- ④ 27만원
- ⑤ 28만원

해설

매월 초에 a 원씩 월이율 1%, 한 달마다 복리로 5년 동안 적립하여 2000만원을 만들어야 하므로

$$a(1 + 0.01) + a(a + 0.01)^2 + \cdots + a(1 + 0.01)^{60} = 20000000$$

$$\frac{a(1 + 0.01) \{ (1 + 0.01)^{60} - 1 \}}{(1 + 0.01) - 1} = 20000000$$

$$= \frac{1 \times 1.01 \times (1.8 - 1)}{0.01} = 20000000$$

$$80.8a = 20000000$$

$$\therefore a \approx 250000$$

따라서 매월 적립해야 할 금액은 25만원이다.

41. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ 의 부분집합 S 가 다음 조건을 만족할 때 $n(S)$ 의 최댓값은?

$a \in S, b \in S \ (a \neq b) \text{ 이면 } a + b \neq 5k$
(k 는 자연수)

- ① 6
- ② 7
- ③ 10
- ④ 15
- ⑤ 20

해설

1에서 32까지의 자연수를 5로 나누었을 때, 나머지에 따라 5개의 집합으로 분류하면

$$A_0 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

$$A_1 = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31\}$$

$$A_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, 27, 32\}$$

$$A_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, 28\}$$

$$A_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, 29\}$$

구하는 집합 S 의 원소는 A_0 의 원소 중 1개, A_1 과 A_4 의 원소 중 한 쪽 것만 택해야 하므로 큰 쪽인 A_1 의 7개, A_2 와 A_3 중 A_2 의 7개를 택하면 $n(S)$ 의 최댓값은 15 (개)이다.

42. $A = \{\emptyset, \{a\}, b, \{c, d\}, e\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\{a\} \in A$ ② $\emptyset \in A$ ③ $\{c, d\} \subset A$
④ $n(A) = 5$ ⑤ $\{b, e\} \subset A$

해설

- ③ $\{c, d\} \in A$

43. x 의 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대해 $A = \{x \mid f(x) - g(x) = 0\}$, $B = \{x \mid f(x) = 0, g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 0\}$ 일 때, 다음 중 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계로 옳은 것을 고르면?

- ① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$
 ④ $B \subset C \subset A$ ⑤ $C \subset B \subset A$

해설

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid f(x) - g(x) = 0\} = \{x \mid f(x) = g(x)\} \\ B &= \{x \mid f(x) = 0, g(x) = 0\} \\ &= \{x \mid f(x) = g(x) = 0\} \\ \therefore B &\subset A \quad \cdots \ominus \\ C &= \{x \mid \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 0\} \\ &= \{x \mid f(x) = g(x) \text{ 또는 } f(x) = -g(x)\} \\ \therefore A &\subset C \quad \cdots \omin� \\ \omin�, \omin� &\text{에서 } B \subset A \subset C \end{aligned}$$

44. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, x\}$ 에 대하여 A 의 모든 부분집합 원소들의 총합을 구했더니 1024였다면 x 의 값은?

① 6

② 8

③ 16

④ 17

⑤ 24

해설

부분집합에서 각 원소들은 총 2^5 번씩 들어가 있으므로 $2^5 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x) = 1024 = 2^{10}$

$$x + 15 = 2^5 = 32$$

$$\therefore x = 17$$

45. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $(A \cup B)^c = A \cap B^c = \emptyset$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① B 는 유한집합이다.
- ② B 는 무한집합이다.
- ③ A 가 무한집합이면 B 는 유한집합이다.
- ④ A 가 유한집합이면 B 는 유한집합이다.
- ⑤ A, B 모두 무한집합이 아니다.

해설

- ① A 가 유한집합이면, $(A \cup B)^c = \emptyset$ 가 되려면 $A \cup B = U$ 이므로 B 는 무한집합이어야 한다.
- ② A 가 무한집합이면, $A \cap B^c = \emptyset$ 가 되려면 $A - B = \emptyset$, $A \subset B$ 이므로 B 도 무한집합이어야 한다. 따라서 B 는 항상 무한집합이다.

46. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면

$$1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$$

이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)} \text{ 이고,}$$

등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.

$$\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{ 1 + (abc)^{\frac{1}{3}} \right\}^3$$

$$\text{그러므로 } (abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$$

곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.

또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

① $abc, a = b = c = 1$

② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a = 2$ 이고 $b = c$

③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 1$

④ $abc, a = b$ 또는 $c = 2$

⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 2$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, ab + bc + ca \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$$

또, 위에서 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로 $(1+a)^3 = 8$ 에서

$$a = b = c = 1$$

47. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 가 성립할 때, 실수 c 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$a + b + c = 2 \Rightarrow a + b = 2 - c$

$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4 - c^2$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

$2(4 - c^2) \geq (2 - c)^2$

$8 - 2c^2 \geq 4 - 4c + c^2$

$3c^2 - 4c - 4 \leq 0$

$(c - 2)(3c + 2) \leq 0,$

$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$

$\therefore c$ 의 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

합 : $2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

48. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

- 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$

· 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립한다.

이 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

- (i) $f(0) = 2$

(ii) $f(-x) = -f(x)$

(iii) $f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$

(iv) $\{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2 = f(x+y)f(x-y) + 4$

- ① i , ii

② i , ii, iii

③ i , iii, iv

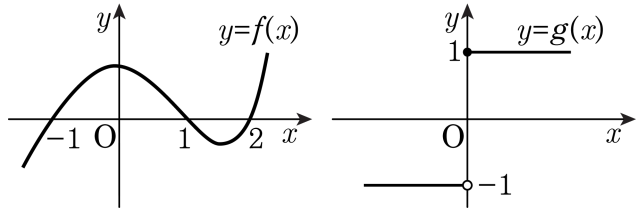
④ ii, iii, iv

⑤ i , ii, iii, iv

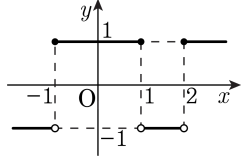
해설

(i) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면 $f(0)f(0) = f(0+0) + f(0-0)$ 이다.
정리하면 $\{f(0)\}^2 - 2f(0) = 0$
 $f(0)(f(0) - 2) = 0$ 이므로 $\therefore f(0) = 2$ ($\because f(x) \neq 0$)
(ii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $x = 0, y = x$ 를 대입하면 $f(0)f(x) = f(0+x) + f(0-x)$ 이다.
 $2f(x) = f(x) + f(-x)$ ($\because f(0) = 2$)
 $\therefore f(-x) = f(x)$ 이므로 ii는 옳지 않다.
(iii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $y = x$ 를 대입하면 $f(x)f(x) = f(x+x) + f(x-x)$ 이다.
 $f(2x) = \{f(x)\}^2 - f(0)$
 $\therefore f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ ($\because f(0) = 2$)
(iv) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $x = x+y, y = x-y$ 를 대입하면 $f(x+y)f(x-y) = f((x+y) + (x-y)) + f((x+y) - (x-y))$
 $f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$ 이다.
 $f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ 을 $f(2x), f(2y)$ 에 적용하면 $f(x+y)f(x-y) = \{f(x)\}^2 - 2 + \{f(y)\}^2 - 2$ 이다.
 $\therefore \{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2 = f(x+y)f(x-y) + 4$

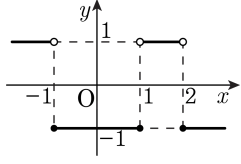
49. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f, g 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 그래프는?



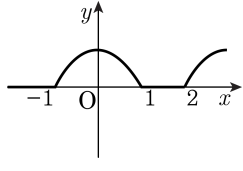
①



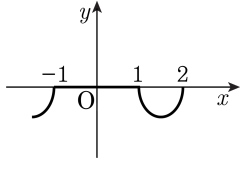
②



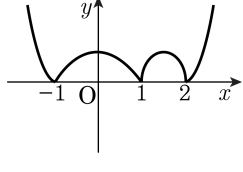
③



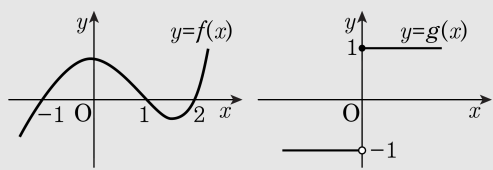
④



⑤

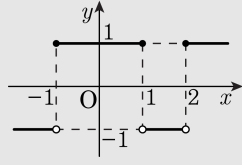


해설



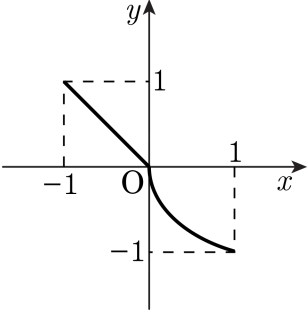
$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x \leq 1, 2 \leq x) \\ -1 & (x < -1, 1 < x < 2) \end{cases}$$



50. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 함수 f 를 $f(x) = \begin{cases} -x & (-1 \leq x \leq 0) \\ -\sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 로

정의하고, $g = f \circ f$ 라 할 때, 다음 중 $g^{-1}(x)$ 의 그래프를 그리면?



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

$-1 \leq x \leq 0$ 일 때, $f(x) = -x \geq 0$ 이므로
 $g(x) = f(f(x)) = f(-x) = -\sqrt{-x}$ 이다.
 $0 \leq x \leq 1$ 일 때 $f(x) = -\sqrt{x} < 0$ 이므로
 $g(x) = f(f(x)) = f(-\sqrt{x}) = -(-\sqrt{x}) = \sqrt{x}$

$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1) \\ -\sqrt{-x} & (-1 \leq x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$y = g(x)$ 의 그래프는 ④이다.
또한 $y = g^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로
③이다.