

1. 다음 중 집합이 될 수 없는 것은?

① $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$

② 한글 자음의 모임

③ $\{x \mid x \text{는 } x \times 0 = 0 \text{을 만족하는 자연수}\}$

④ 키가 나보다 큰 사람들의 모임

⑤ 나보다 착한 학생의 모임

해설

⑤, '나보다 착한 학생'은 그 대상을 분명히 알 수 없으므로 집합이라고 할 수 없다.

2. 다음 중 집합의 원소가 없는 것은?

① $\{0\}$

② $\{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수 중 홀수}\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } 3 \times x = -1 \text{인 자연수}\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 11 < x \leq 12 \text{인 자연수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } x \leq 1 \text{인 자연수}\}$

해설

① $\{0\}$

② $\{1\}$

④ $\{12\}$

⑤ $\{1\}$

3. 집합 $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은 ?

① $A \supset \{1, 2\}$

② $A \ni \{1, 2\}$

③ $A \supset \{\{1, 2\}\}$

④ $A \ni \{1\}$

⑤ $A \supset \emptyset$

해설

$\{1, 2\}$ 는 A 의 원소이고 또 A 의 부분집합도 된다. $\therefore A \ni \{1, 2\}, A \supset \{1, 2\}$

$\{1\}$ 은 A 의 부분집합이지만 A 의 원소는 아니다. $\therefore A \supset \{1\}, A \not\ni \{1\}, A \ni 1$

4. 다음 두 집합 A, B 사이의 포함 관계가 $A \subset B$ 인 것을 모두 골라라

㉠ $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}, B = \{x \mid x \text{ 는 한 자리 자연수}\}$

㉡ $A = \{x \mid x \text{ 는 } 4 \text{ 의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{ 는 } 8 \text{ 의 약수}\}$

㉢ $A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{x \mid x \text{ 는 } 10 \text{ 보다 작은 짝수}\}$

㉤ $A = \{x \mid x \text{ 는 } 12 \text{ 의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{ 는 } 6 \text{ 의 약수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

㉤ $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, B = \{1, 2, 3, 6\}$

따라서 $B \subset A$

5. 집합 $A = \{6, 12, 18, \dots\}$, $B = \{12, 24, 36, \dots\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 조건 제시법으로 바르게 나타낸 것은?

① $\emptyset$

② $\{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$

해설

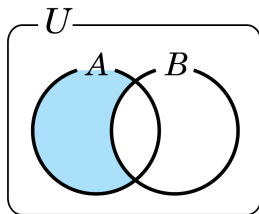
$A \cap B$ 은 집합 A 에도 속하고 B 에도 속하는 집합을 의미한다.

$A \cap B = \{12, 24, 36, \dots\}$ 이므로

조건제시법으로 고쳐보면

$A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$ 가 된다.

6. 다음 벤 다이어그램의 빗금 친 부분을 표현한 것으로 옳지 않은 것은?



① $A \cap B^c$

② $A - (A \cap B)$

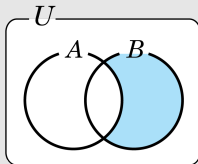
③ $A - B$

④ $(A \cup B) - A$

⑤ $B^c - A^c$

해설

④



7. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$

② $P \cap Q = \phi$

③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$

⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참따라서 $Q \subset P$

8. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

9. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

① $f(x) = x^2$

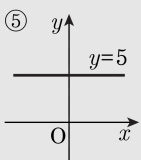
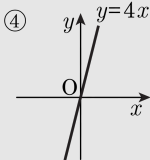
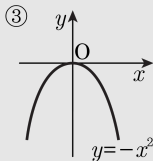
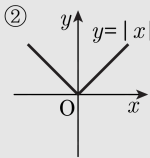
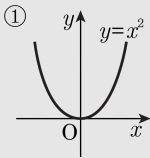
② $f(x) = |x|$

③ $f(x) = -x^2$

④ $f(x) = 4x$

⑤ $f(x) = 5$

해설



함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

10. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$ 일 때, 합성함수 $g \circ f$ 의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 2) \\ &= 2(x + 2) - 3 = 2x + 1\end{aligned}$$

합성함수 $g \circ f$ 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$y = 2x + 1$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \text{ 이 된다.}$$

따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

11. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = 2x + 5$ 로 정의할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a$, $f^{-1}(5) = b$ 로 놓으면

$$f(a) = 1, f(b) = 5$$

$f(x) = 2x + 5$ 이므로

$$f(a) = 1 \text{ 에서 } 2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$$

$$f(b) = 5 \text{ 에서 } 2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore a + b = -2$$

12. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

13. 다음 식을 간단히 하면?

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

① 1

② x

③ $\frac{1}{x}$

④ $\frac{1}{1-x}$

⑤ $-x$

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} \\ &= 1 - \frac{x-1}{x-1-x} \\ &= 1 + x - 1 = x \end{aligned}$$

14. 함수 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-1} \text{ 에서 } y(x-1) = ax+1$$

$$yx - y = ax + 1, yx - ax = 1 + y$$

$$x(y-a) = 1+y, x = \frac{1+y}{y-a}$$

$$\therefore y^{-1} = \frac{x+1}{x-a}$$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$$\frac{x+1}{x-a} = \frac{ax+1}{x-1}$$

$$\therefore a = 1$$

15. $y = \sqrt{4x - 12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α , y 축으로 β 만큼 평행이동한 것이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3$, $\beta = 5$
 $\therefore \alpha + \beta = 8$

16. 다음 등식 중 옳은 것은?

① $(A - B)^c = A^c \cap B$

② $A \cap (A \cup B)^c = B^c$

③ $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cup C)$

④ $(A^c \cup B \cup C)^c = A \cap B^c \cap C^c$

⑤ $A - (B - C)^c = (A - B) - C^c$

해설

$$\begin{aligned}\text{① } (A - B)^c &= (A \cap B^c)^c \\ &= A^c \cup (B^c)^c \\ &= A^c \cup B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{② } A \cap (A \cup B)^c &= A \cap (A^c \cap B^c) \\ &= (A \cap A^c) \cap B^c \\ &= \emptyset \cap B^c \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{③ } (A - B) \cup (A - C) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A - (B \cap C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{④ } (A^c \cup B \cup C)^c &= (A^c)^c \cap B^c \cap C^c \\ &= A \cap B^c \cap C^c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{⑤ } A - (B - C)^c &= A - (B \cap C^c)^c \\ &= A \cap \{(B \cap C^c)^c\}^c \\ &= A \cap (B \cap C^c) \\ &= A \cap B \cap C^c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A - B) - C^c &= (A \cap B^c) \cap (C^c)^c \\ &= (A \cap B^c) \cap C \\ &= A \cap B^c \cap C\end{aligned}$$

17. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$$

18. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $p \rightarrow \sim q, r \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$

② $q \rightarrow r$

③ $\sim r \rightarrow q$

④ $r \rightarrow \sim p$

⑤ $q \rightarrow \sim r$

해설

$$r \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim r, \sim p \rightarrow \sim q, \rightarrow q \rightarrow p \text{에서 } r \rightarrow q \rightarrow p \\ \Leftrightarrow r \rightarrow \sim p$$

19. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x} \text{ 에서}$$

$$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$$

$$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$$

$$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$$

20. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

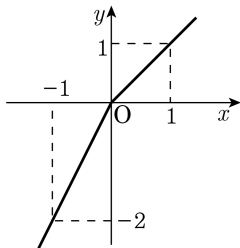
$$x^2 + y^2 = 10 \text{ 이므로 } 100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

$$\therefore M = 10, m = -10$$

$$\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$$

21. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1, 1), (-1, -2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

- ㉠ $f(10) = f(f(10))$
 ㉡ $f^{-1}(-2) = -1$
 ㉢ $y = f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(10) = 10$

$$f(f(10)) = f(10) = 10$$

$$\therefore f(10) = f(f(10)) \text{ (참)}$$

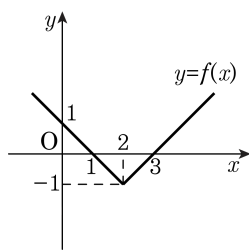
㉡ $f(-1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -1$ (참)

㉢ $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

따라서 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 는 무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

22. 함수 $f(x) = |x - 2| - 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

- ㉠ $f(0) = 0$
- ㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
- ㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
- ㉤ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉤

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

- ㉠ $f(0) = 1$
 - ㉡ $f(1) = 0, f(3) = 0$ 이므로
 $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
 - ㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
 x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
 - ㉤ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
 $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
- 따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

23. 다음의 식을 간단히 하면?

$$\frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{119} + \sqrt{121}}$$

① 5

② 10

③ 0

④ -10

⑤ -5

해설

준식을 유리화하면

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{121}}{2} = \frac{11-1}{2} = 5 \end{aligned}$$

24. $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, b = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $a^3 + b^3$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 정수)

▶ 답 :

▶ 정답 : $3\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$a + b = \sqrt{6}, ab = 1$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

25. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2, y=3$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

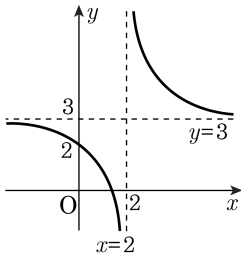
① -6

② -4

③ -3

④ 2

⑤ 7



해설

점근선이 $x=2, y=3$ 이므로 $a=3, c=-2$

점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $\frac{b}{c} = 2$

$$\therefore b = -4$$

$$\therefore a + b + c = -3$$