1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면?

① 10 보다 큰 짝수들의 모임

② 아주 큰 수들의 모임

③ 몸무게가 40kg 이하인 우리 반 학생들의 모임

④ 예쁜 강아지들의 모임

⑤ 공부를 잘하는 학생들의 모임

해설

'아주 큰', '예쁜' 은 명확한 기준이 될 수 없다.

2. 다음 중 공집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{0\}$
② $\varnothing$
③ $\{x|x \le 2$인 짝수$\}$
④ $\{x|1 < x < 2$인 자연수$\}$
⑤ $\{\varnothing\}$

해설

③ $\{x|x \le 2$인 짝수$\} = \{2\}$
④ 1 과 2 사이에는 자연수가 없으므로 $\{x|1 < x < 2$인 자연수$\} = \varnothing$

3. 세 집합 A = $\{x|x$는 요일의 종류$\}$, B = $\{x|x$는 10 보다 작은 3 의 배수$\}$, C = $\{x|x$는 월드컵 4 강에 속한 국가$\}$ 에 대하여 $n(A) + n(B) - n(C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$A = \{$월 , 화 , 수 , 목 , 금 , 토 , 일$\}$, $n(A) = 7$
$B = \{3, 6, 9\}$, $n(B) = 3$
집합 C 는 국가명은 몰라도 4강에 속하였기 때문에, 4개국이라는 것을 알 수 있으므로 $n(C) = 4$
따라서 $n(A) + n(B) - n(C) = 7 + 3 - 4 = 6$ 이다.

4. 집합 $A = \{\varnothing, 1, 2, \{1, 3\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $3 \in A$　② $\{2\} \in A$　③ $\{2, 3\} \in A$

④ $\varnothing \in A$　⑤ $\{1, 3\} \subset A$

해설

① $3 \notin A$
② $\{2\} \subset A$ 또는 $2 \in A$
③ $\{2, 3\} \notin A$
④ $\varnothing \subset A$ 또는 $\varnothing \in A$
⑤ $\{1, 3\} \in A$ 또는 $\{\{1, 3\}\} \subset A$

5. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $\{2,\ 3,\ 4\} \subset \{x \mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$

② $\{1,\ 2,\ 3\} \subset \{x \mid x\text{는 } 1 < x < 5\text{인 자연수}\}$

③ $\{1, 3\} \not\subset \{0, 1, 3, 9\}$

④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} \subset \{x \mid x\text{는 } 6\text{미만의 짝수}\}$

⑤ $\{x \mid x\text{는 } 6\text{의 배수}\} \subset \{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수}\}$

해설

①

$\{2,\ 3,\ 4\} \subset \{x \mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$

$\{2,\ 3,\ 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

⑤

$\{x \mid x\text{는 } 6\text{의 배수}\} \subset \{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수}\}$

$\{6,\ 12,\ 18, \ldots\} \subset \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$

6. 다음 중 부분집합의 개수가 32 개인 집합이 아닌 것은?

① $\{x \mid x$는 16의 약수$\}$

② $\{x \mid x$는 6보다 작은 자연수$\}$

③ $\{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$

④ {선예, 유빈, 소희, 선미, 예은}

⑤ $\{x \mid x$는 20 이하의 4의 배수$\}$

해설

① $2^5 = 32$ (개)
② $2^5 = 32$ (개)
③ $2^4 = 16$ (개)
④ $2^5 = 32$ (개)
⑤ $2^5 = 32$ (개)

7. 두 집합 A, B가 그림과 같을 때, $A \cup B$를 나타낸 것으로 옳은 것은?

①

②

③

④

⑤

해설

$A \cup B = A \cup B$

8. 두 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, f\}$ 에 대하여 $n(A - B)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

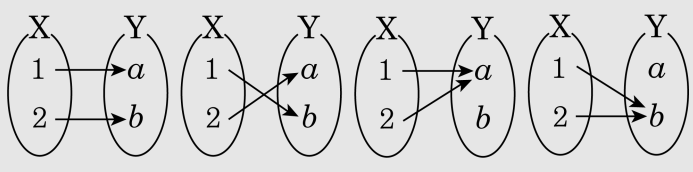
$A - B = \{a, c, e\}$

9. 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b\}$ 라 할 때, 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하면?

① 1 가지 ② 2 가지 ③ 3 가지

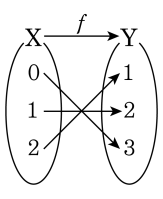
④ 4 가지 ⑤ 5 가지

해설



∴ 4가지

10. 다음 그림의 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2) = 1,\ \ f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2,\ \ f^{-1}(2) = 1$
$\therefore\ f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 2 + 1 = 3$

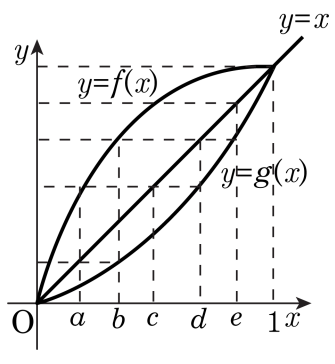
11. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$일 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$이므로
역함수의 정의에 의해서
$f(2) = -7$, $f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7$, $3a = -9$
$\therefore a = -3$

12. 집합 $A = \{x|0 \le x \le 1\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $(f \circ g \circ f^{-}1)(d)$의 값은 얼마인가?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$y = x$를 이용하여 함숫값을 구한다.
$f^{-1}(d) = x$라 하면,
$f(x) = d \qquad \therefore x = b$
$\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d)$
$= (f \circ g)(f^{-1}(d))$
$= (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = c$

13. 유리식 $\dfrac{(x-1)(x+2)(x+4)}{x^3+3x^2-4}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{x+2}{x-1}$ ② $\dfrac{x+1}{x+2}$ ③ $\dfrac{x+4}{x+2}$ ④ $\dfrac{x+1}{x-2}$ ⑤ $\dfrac{x+4}{x-2}$

해설

$$\frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{x^3+3x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{(x-1)(x+2)^2}$$
$$= \frac{x+4}{x+2}$$

14. 등식 $a(1+3\sqrt{2})+b(2-\sqrt{2})=-4+9\sqrt{2}$를 만족하는 유리수 a, b의 값은?

① $a=1,\ b=-3$　② $a=1,\ b=-2$

③ $a=2,\ b=-3$　④ $a=-2,\ b=-1$

⑤ $a=-2,\ b=3$

해설

$(a+2b)+(3a-b)\sqrt{2}=-4+9\sqrt{2}$이므로

$\begin{cases} a+2b=-4 \\ 3a-b=9 \end{cases}$ 를 연립하면,

$\therefore a=2,\ b=-3$

15. 다음 함수의 그래프 중 평행이동하여 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \sqrt{x}$ ② $y = \sqrt{2x+1} - 1$

③ $y = \sqrt{-2x-1} - 1$ ④ $y = -\sqrt{2x} + 1$

⑤ $y = -\sqrt{-2x}$

해설

$y = \sqrt{2x}$의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼
y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y = \sqrt{2(x-m)} + n = \sqrt{2x-2m} + n$이 된다.

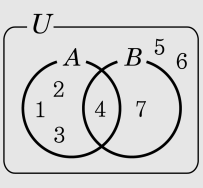
16. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{4, 7\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 은?

① $\{5, 6\}$ ② $\{6, 7\}$ ③ $\{4\}$

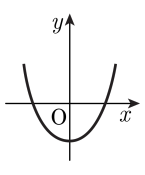
④ $\{5, 6, 7\}$ ⑤ $\{4, 5, 6\}$

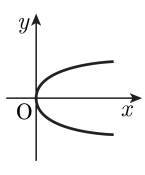
해설

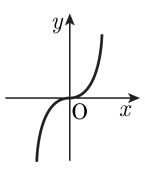
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{1, 2, 3, 4, 7\})^c = \{5, 6\}$ 이다.

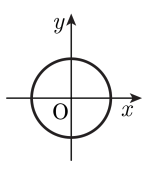


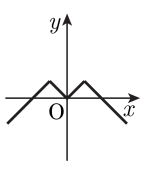
17. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

18. 양의 정수 전체의 집합 X에서 Y로의 함수 f를 다음과 같이 정의한다. $f(x) = (x$의 약수의 개수$)$ 이 때, 다음 중 $f(x) = 4$인 x가 될 수 있는 것을 고르면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 24

해설

5 의 약수 : 1, 5 $\Rightarrow f(5) = 2$
9 의 약수 :1, 3, 9 $\Rightarrow f(9) = 3$
12 의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\Rightarrow f(12) = 6$
15 의 약수 : 1, 3, 5, 15 $\Rightarrow f(15) = 4$
24 의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 $\Rightarrow f(24) = 8$
따라서 보기 중 $f(x) = 4$인 것은 15

19. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

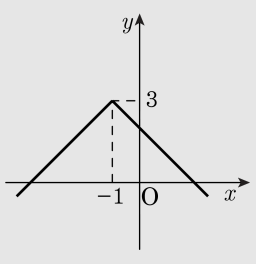
0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

20. 함수 $y = -|x+1|+3$ 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -|x+1|+3$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 최댓값은 $x = -1$ 일 때, 3이다.



21. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

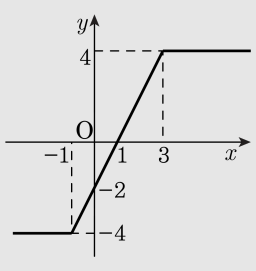
$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$



22. $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}+\dfrac{2x^2-5}{x^2+x-2}$을 계산하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(준 식)

$$=\frac{x-2}{(2x-3)(x-1)}+\frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)+(3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)}=2$$

23. 다음 식을 간단히 하면 $\dfrac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{5}{x(x+10)}$$

$a=5,\ b=10$이므로 $a+b=15$

24. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$ 을 간단히 하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1}{\sqrt{2}-1}} = 1-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\sqrt{2}$$

$\therefore (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = -1$

25. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나눈다.

$x + \frac{1}{x} - 5 = 0$

$x + \frac{1}{x} = 5$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$

26. $x : y = 4 : 3$일 때, $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$의 값은?

① $\dfrac{7}{25}$ ② $\dfrac{9}{25}$ ③ $\dfrac{11}{25}$ ④ $\dfrac{13}{25}$ ⑤ $\dfrac{16}{25}$

해설

$x : y = 4 : 3$이므로 $x = 4k$, $y = 3k (k \neq 0)$라고 하면

$\therefore (\text{준식}) = \dfrac{16k^2 - 9k^2}{16k^2 + 9k^2} = \dfrac{7}{25}$

27. $\frac{x}{5}=\frac{y+4z}{2}=\frac{z}{3}=\frac{-x+2y}{A}$ 에서 A의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A=-25$

해설

$$\frac{-x+2(y+4z)-8\times z}{-5+2\times 2-8\times 3}$$
$$=\frac{-x+2y+8z-8z}{-5+4-24}=\frac{-x+2y}{-25}$$
$$\therefore A=-25$$

28. $-1 < x < 1$일 때, $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2+2x+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(준식) $= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$

$= |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$

29. $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, x^3+y^3 의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$x+y=4,\quad xy=1$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\times4=52$

30. 분수함수 $y=\dfrac{3x-2}{2-x}$ 의 점근선의 방정식이 $x=a,\ y=b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=-1$

해설

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ 의 점근선은 $x=-\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{a}$ 이므로

주어진 분수함수의 점근선은 $x=2,\ y=-3$ 이다.

$\therefore 2+(-3)=-1$

31. 함수 $y=\dfrac{x+3}{x-3}$ 은 $y=\dfrac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y=\dfrac{x+3}{x-3}=1+\dfrac{6}{x-3}$

$y=\dfrac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3 , y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3,\ n=1$

$m+n=4$

32. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 의 역함수를 구하면

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{ax+b}{x+c}$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ 2+3+4=9$

33. $y = \sqrt{4x-12}+5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 a, y 축으로 b만큼 평행이동한 것이다.$a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3}+5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축 방향으로 3만큼,
y 축 방향으로 5만큼 평행이동한
그래프의 함수이다.
즉, $a = 3,\ b = 5$
$\therefore\ a+b = 8$

34. 두 집합 $A = \{12,\ a,\ b\}$, $B = \{7,\ 15,\ b+5\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$b+5=12$ 이므로 $b=7, a=15$

$\therefore\ a-b=15-7=8$

35. 다음 <보기> 의 명제 중 참인 것을 모두 고른 것은? (단, a, b, c, d 는 실수)

보기

㉠ $ab = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.

㉡ $a + b > 2$, $ab > 1$ 이면 $a > 1$, $b > 1$ 이다.

㉢ $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

㉣ $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면 $a = b = 0$ 이다.

㉤ $a + b > 0$ 이면 $a > 0$ 또는 $b > 0$ 이다.

① ㉠, ㉢ ② ㉢, ㉤ ③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉤

해설

㉠ 반례 : $a = 0, b = 1$

㉡ 반례 : $a = 3, b = \frac{1}{2}$

㉣ 반례 : $a = -\sqrt{2}, b = 1$

36. 두 조건 $p : 2 \le x \le 2k$, $q : -\frac{k}{3} \le x < 16$ 에 대하여 'p이면 q 이다.'가 참이 되도록 하는 정수 k 의 개수는? (단, $k \ge 1$)

① 7 개　② 8 개　③ 12 개　④ 15 개　⑤ 16 개

해설

$-\frac{k}{3} \le 2 \rightarrow k \ge -6,\ 2k < 16 \rightarrow k < 8,\ 1 \le k < 8$이므로

정수 k의 개수는 7개

37. a, b, c 는 실수이다. 명제 '$a^2+c^2=2b(a+c-b)$ 이면 $a=b=c$ 이다.'의 대우는?

① a, b, c 가 모두 서로 다른 수이면 $a^2+c^2 \neq 2b(a+c-b)$ 이다.

② $a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이면, $a^2+c^2 \neq 2b(a+c-b)$ 이다.

③ a, b, c 중 서로 다른 두 수가 있으면 $a^2+c^2 \neq 2b(a+c-b)$ 이다.

④ $a=b=c$ 이면 $a^2+c^2=2b(a+c-b)$ 이다.

⑤ $a \neq b$, $c=0$ 이면 $a^2+c^2=2b(a+c-b)$ 이다.

해설

a, b, c 중 서로 다른 두 수가 있으면 $a^2+c^2 \neq 2b(a+c-b)$ 이다.

38. 두 명제 '여름이 오면 덥다.', '더우면 비가 온다.' 가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것을 모두 고르면?

① 덥지 않으면 여름이 오지 않는다.

② 여름이 오면 비가 온다.

③ 비가 오면 여름이 온다.

④ 비가 오지 않으면 여름이 오진 않는다.

⑤ 더우면 여름이 온다.

해설

세 명제 '여름이 온다.', '덥다.', '비가 온다.' 를 각각 p, q, r 로 놓으면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 명제가 참이면 그 대우 역시 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$, $\sim r \Rightarrow \sim q$, $\sim r \Rightarrow \sim p$ 그러나 어떤 명제가 참이라고 해서 역과 이가 반드시 참인 것은 아니다. 따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ③, ⑤이다.

39. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

① $p : ac = bc,\ q : a = b$

② $p : A \subset B,\ q : A - B = \varnothing$

③ $p : a > 0$ 이고 $b < 0,\ q : ab < 0$

④ $p : a + b$ 가 정수, $q : a,\ b$ 가 정수

⑤ p : $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다. q : $\triangle ABC$ 의 세 내각의 크기가 같다.

해설

① $ac = bc$ ⟹ $a = b$ (반례 : $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$)

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

② $A \subset B$ ⟹ $A - B = \varnothing$

따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

③ $a > 0$ 이고 $b < 0$ ⟹ $ab < 0$ (반례 : $a = -2,\ b = 2$)

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건

④ $a+b$ 가 정수 ⟹ $a,\ b$ 가 정수 (반례 : $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$)

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.

따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

40. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$　② $P \cap Q = Q$　③ $P \cap Q = P$

④ $P^c = Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \Rightarrow \sim q$이고, 대우 $q \rightarrow p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

41. 다음은 $x>0$일 때, $x+\frac{1}{x}\geq 2$임을 증명한 것이다.

> $x>0$이면 (가) >0이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
> $\frac{1}{2}$(나) $\geq$ (다)이므로 $\frac{1}{2}$(나) ≥ 1이다. 즉, 등호가 성립하는 것은
> $x=$ (가)$(x>0)$일 때 이므로 $\therefore x=1$

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① $x,\ \frac{1}{x},\ x+\frac{1}{x}$
② $x,\ \frac{1}{x},\ 2\left(x+\frac{1}{x}\right)$
③ $x,\ x+\frac{1}{x},\ 2\left(x+\frac{1}{x}\right)$
④ $\frac{1}{x},\ x+\frac{1}{x},\ \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$
⑤ $\frac{1}{x},\ 2\left(x+\frac{1}{x}\right),\ \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$

해설

산술평균과 기하평균의 관계에 의해
$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$

42. 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$가 성립할 때, 실수 d의 최솟값 m과 최댓값 M의 합 $m+M$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$

$a+b+c=8-d$, $a^2+b^2+c^2=124-d^2$

코시-슈바르츠 부등식에서

$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$이므로

$3(124-d^2)\geq(8-d)^2$

$372-3d^2\geq d^2-16d+64$

$4d^2-16d+64-372\leq 0$

$4d^2-16d-308=d^2-4d-77\leq 0$

$\therefore (d-11)(d+7)\leq 0$

$\therefore -7\leq d\leq 11$

따라서 최솟값 $m=-7$, 최댓값 $M=11$

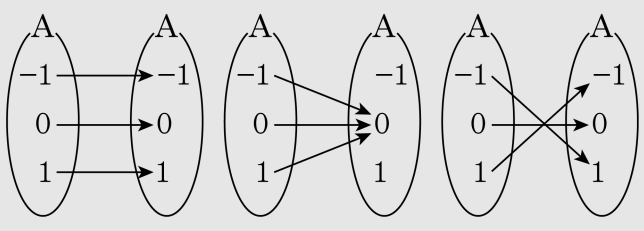
이므로 $m+M=-7+11=4$

43. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \to A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

① 2 가지 ② 3 가지 ③ 6 가지
④ 8 가지 ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$
$\therefore f(0) = 0 \cdots$ ㉠
$f(-1) = -f(1) \cdots$ ㉡



㉠, ㉡을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

44. 두 집합 $A = \{x|x$는 10 이상 15 이하의 자연수$\}$, $B = \{x|x$는 12 이상 18 미만의 3 의 배수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$X \subset A, \quad B \subset X, \quad n(X) = 4$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
$B = \{12,\ 15\}$
$X \subset A,\ B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$
$\{12,\ 15\} \subset X \subset \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4 개인 집합이므로
$\{10,\ 11,\ 12,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 13,\ 15\}$,
$\{10,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 13,\ 15\}$,
$\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ 의 6 개이다.

45. 세 집합 A, B, C 에 대하여
$n(A) = 50$, $n(B) = 32$, $n(C) = 15$, $n(A \cup B) = 70$, $n(A \cap C) = 15$, $n(B \cap C) = 0$ 일 때,
$n(A \cup B \cup C) + 2 \times n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
$B \cap C = \varnothing$ 이므로 $A \cap B \cap C = \varnothing$ 이 된다.
$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$ 이고
$A \cap B \cap C = \phi$ 이므로 $n(A \cap B) = 50 + 32 - 70 = 12$
$\therefore n(A \cup B \cup C) = 50 + 32 + 15 - 15 - 12 - 0 + 0 = 70$
따라서 정답은 $70 + 2 \times 0 = 70$

46. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 사이에 $[A \cap (A^c \cup B)] \cup [B \cap (B^c \cap C^c)^c] = A \cup B$ 인 관계가 있을 때, 옳은 것은 ?

① $A \subset B$　② $B \subset A$　③ $(A \cup B) \subset C$

④ $C \subset (A \cup B)$　⑤ $(A \cap B) \subset C$

해설

$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B$,
$B \cap (B^c \cap C^c)^c = B \cap [(B^c)^c \cup (C^c)^c] = B \cap (B \cup C) = B$
따라서, 조건식은 $(A \cap B) \cup B = A \cup B$
그런데, $(A \cap B) \cup B = B$ 이므로
$B = A \cup B$ 이다.
즉, $A \cup B = B$
$\therefore A \subset B$

47. 세 집합 A, B, T에 대하여 $T = (A \cup B) - (A \cap B)$가 성립할 때, 다음 중 참인 명제는?

① A가 무한집합이면 T도 무한집합이다.

② B가 유한집합이면 T는 무한집합이다.

③ $A \cap B$가 유한집합이면 T는 무한집합이다.

④ $A \cup B$가 유한집합이면 T도 유한집합이다.

⑤ T가 유한집합이면 A, B모두 무한집합이다.

해설

$T = (A \cup B) - (A \cap B)$에서 $T \subset (A \cup B)$이므로 ④는 항상 성립한다.
(①, ②, ③, ⑤ 의 반례 : $A = B$ 일 때)

48. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　② $q \to \sim p$　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q$　$s \to \sim r$　$q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$

49. 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1)=3$ 일 때, $f(-1)$의 값을 구하면?

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$에서
$x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0),\ f(0)=0$이다.
$x=1, y=-1$을 대입하면
$f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)=0$
$f(-1)=-f(1),\ f(1)=3$이므로
$\therefore\ f(-1)=-3$

50. 두 일차함수가 $f(x)=ax+2,\ g(x)=bx+c$ 로 주어질 때, $g^{-1}(2)=3$, $(g\circ f)(x)=3x-2$ 를 만족하는 a 의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$f(x)=ax+2,\ g(x)=bx+c$ 에서
$g^{-1}(2)=3$ 이면 $g(3)=2$ 이므로
$3b+c=2\cdots$㉠
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=b(ax+2)+c$
$\quad=abx+2b+c=3x-2$
$\therefore\ ab=3\cdots$㉡
$2b+c=-2\cdots$㉢
㉠ − ㉢ 하면
$b=4,\ c=-10,\ a=\frac{3}{4}$

해설

$g^{-1}(2)=3 \Leftrightarrow g(3)=2$
$(g\circ f)(x)=3x-2 \Leftrightarrow g(f(x))=3x-2$
$f(x)=ax+2$ 에서 $f(k)=ak+2=3\cdots$㉠ 이라 하면
$g(3)=g(f(k))=3k-2=2$, $k=\frac{4}{3}$
㉠ 에 대입하면 $\frac{4}{3}a+2=3$
$\therefore\ a=\frac{3}{4}$