1. 집합 S 는 다음 조건을 만족한다고 한다.

(i) $2 \notin S$, $a \in S$ 이면 $\dfrac{1}{2-a} \in S$
(ii) 3은 집합S 의 원소이다.

이때, 집합 S 의 원소 중 정수인 것을 구하여라. (단, 3은 제외)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$3 \in S$ 이므로 조건에 대입하면

$\dfrac{1}{2-3} \in S$ 에서 $-1 \in S$ 이다.

또 $\dfrac{1}{2-(-1)} = \dfrac{1}{3} \in S$ 이고,

다시 대입하면 $\dfrac{1}{2-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{5} \in S$

또 다시 대입하면 $\dfrac{1}{2-\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{7} \in S, \cdots$

계속하면 $\dfrac{2n-1}{2n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ 꼴의 수만 나타난다.

2. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x|x\text{는 40 이하의 짝수}\}) = 40$

⑤ $n(\{x|x\text{는 } 2 < x < 4\text{인 홀수}\}) = 1$

해설

①$n(\varnothing) = 0,\ n(\{0\}) = 1$
②$n(\{1,\ 2,\ 4\}) - n(\{1,\ 4\}) = 3 - 2 = 1$
③$n(\{4\}) = 1$
④$n(\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 40\}) = 20$
⑤$n(\{3\}) = 1$

3. 집합 $A=\{x\,|\,x$는 6 이하의 짝수$\}$ 일 때, A 의 진부분집합을 모두 구한 것은?

① $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$

② $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$

③ $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 4, 6\}$

④ $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$

⑤ $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$

해설

$A=\{2, 4, 6\}$

집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 부분집합 :

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$

집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 진부분집합 :

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$ 이므로 ⑤이다.

4. 집합 $A = \{x \mid x$는 $4 \leq x \leq 8$인 자연수$\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3 개인 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 10 개

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3 개인 부분집합은 $\{4, 5, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{4, 5, 8\}$, $\{4, 6, 7\}$, $\{4, 6, 8\}$, $\{4, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{5, 6, 8\}$, $\{5, 7, 8\}$, $\{6, 7, 8\}$ 따라서 부분집합의 개수는 10 이다.

5. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 20보다 작은 3의 배수}\}$ 에서 홀수는 반드시 포함하고, 18 은 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 12 개

해설

$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$ 이므로, $2^{(\text{홀수, 18을 뺀 원소의 개수})} = 2^{6-3-1} = 2^2 = 4(\text{개})$

6. 두 집합 $A = \{6,\ a,\ 1,\ b,\ 3\}$, $B = \{8,\ c,\ 1,\ d,\ 5\}$ 가 서로 같을 때, $(a+b)-(c+d)$ 의 값으로 옳은 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = B$ 이므로

$\{6,\ a,\ 1,\ b,\ 3\} = \{8,\ c,\ 1,\ d,\ 5\}$

이 중 1 은 공통이므로 제외하면

$a = 8,\ b = 5$ 또는 $a = 5,\ b = 8$

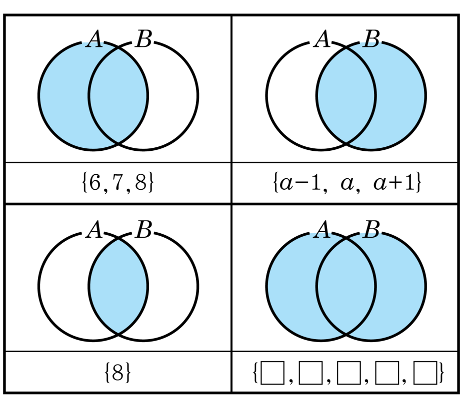
따라서 $a + b = 13$

$c = 3,\ d = 6$ 또는 $c = 6,\ d = 3$

따라서 $c + d = 9$

$\therefore (a+b)-(c+d) = 4$

7. 다음은 두 집합 A, B 의 벤 다이어그램에서 색칠한 부분의 원소를 집합으로 표현한 것이다, $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 10

해설

벤 다이어그램의 색칠한 부분은 차례대로 $A, B, A \cap B, A \cup B$ 를 나타낸다.

$A \cap B = \{8\}$ 이므로 $\{8\} \subset \{a-1, a, a+1\}$ 이다.

i) $a-1=8$ 인 경우, $B=\{8, 9, 10\}$

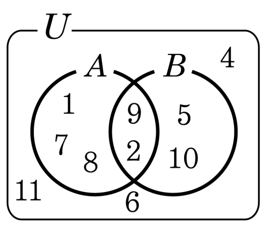
ii) $a=8$ 인 경우, $B=\{7, 8, 9\}$

iii) $a+1=8$ 인 경우, $B=\{6, 7, 8\}$

그런데 ii), iii) 의 경우는 $A \cap B=\{8\}$ 을 만족하지 않는다.

따라서 $a=9, B=\{8, 9, 10\}$ 이고, $A \cup B=\{6, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.

8. 다음 벤 다이어그램에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?



① $A^C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$

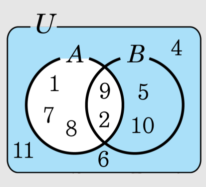
② $B^C = \{1, 4, 6, 7, 8, 11\}$

③ $(A \cap B)^C = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

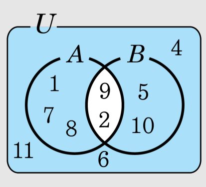
④ $A \cup (A \cup B)^C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

⑤ $A \cap B^C = \{1, 7, 8\}$

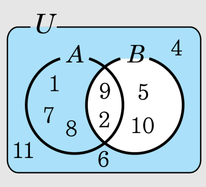
해설

① 

$A^C = \{4, 5, 6, 10, 11, 12\}$

③ 

$(A \cap B)^C = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

④ 

$A \cup (A \cup B)^C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

9. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하고, $P \cap Q = P$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \rightarrow \sim q$ ② $q \rightarrow p$ ③ $\sim p \rightarrow q$
④ $q \rightarrow \sim p$ ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설
$P \cap Q = P$ 이므로 $P \subset Q$ 이다. 따라서, $p \rightarrow q$ 가 참이므로 대우 명제인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

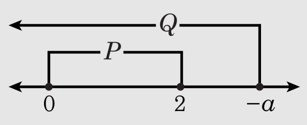
10. 실수 x에 대한 두 조건 $p\ :\ 0 \le x \le 2$, $q\ :\ x+a \le 0$이 있다. 명제 $p\ \rightarrow\ q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$p,\ q$를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $p\ \rightarrow\ q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\},\ Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a,\ a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

11. 다음 명제의 이가 참이 아닌 것은?

① 실수 a, b, c 에 대하여 $ac = bc$ 이면 $a = b$ 이다.

② 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.

③ 실수 x, y 에 대하여 $x > 1,\ y > 1$ 이면 $xy > 1,\ x + y > 2$ 이다.

④ 대각선이 직교하면 마름모이다.

⑤ 두 각이 같으면, △ABC 는 이등변삼각형이다.

해설

'이'의 대우가 '역'이므로, '역'이 참인지 확인 한다.
① 실수 a, b, c 에 대하여 $a = b$ 이면 $ac = bc$ 이다. ⇒ (참)
② 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$ 이다. ⇒ (참)
③ $xy > 1, x + y > 2$ 이면, $x > 1, y > 1$ 이다. $\left(\text{반례} : x = 5y = \frac{1}{2}\right)$
④ 마름모이면 대각선이 직교한다. ⇒ (참)
⑤ △ABC가 이등변삼각형이면, 두 각이 같다. ⇒ (참)

12. 「a, b가 정수일 때, ab 가 짝수이면 a 또는 b는 짝수이다.」라는 명제를 다음과 같이 증명하려고 한다.

주어진 명제의 대우를 쓰면「a, b가 정수일 때, a, b가 모두 홀수이면 ab도 홀수이다.와 같다. 여기서 a, b 를 $a=2k+1$, $b=2l+1$ (단,k, l 은 정수) 로 놓으면 $ab=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1=2(2kl+k+l)+1$ k, l 은 정수이므로 $2kl+k+l$ 도 (㉠) 이다. 그러므로 ab 는 (㉡) 이다. 따라서, 주어진 명제의 대우가 (㉢) 이므로 주어진 명제도 (㉣) 이다.

이 때, ( ) 안에 알맞은 것을 ㉠, ㉡, ㉢ 순서대로 바르게 나타낸 것은?

① 짝수, 정수, 참
② 홀수, 홀수, 거짓
③ 정수, 홀수, 참
④ 홀수, 짝수, 거짓
⑤ 정수, 짝수, 참

해설

k, l 이 정수일 때, $2kl+k+l$ 도 정수이다.
따라서, $ab=2(2kl+k+l)+1$ 은 홀수가 된다.
대우가 참이면 주어진 명제는 항상 참이다.

13. $x^2 - ax + 6 \neq 0$ 이 $x - 2 \neq 0$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$p \to q$ (T) $\leftrightarrow$ $\sim q \to \sim p$ (T)
즉, 주어진 명제가 참이면 그 대우도 참
대우 : $x = 2 \Rightarrow x^2 - ax + 6 = 0$ (T)
$\therefore a = 5$

14. 다음은 실수 $x,\ y,\ z$ 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나]에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$
$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$
$=\frac{1}{2}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$ ([가])0 이므로
$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

① $<,\ x=y=z$
② $\leq,\ x=y=z$
③ $\geq,\ x=y=z$
④ $<,\ xy=yz=zx$
⑤ $\leq,\ xy=yz=zx$

해설

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$

$=\frac{1}{2}\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\}$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geq 0$ 이므로

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (단, 등호는 $x=y=z$ 일 때 성립)

15. $a>1$일 때, $a+\dfrac{4}{a-1}$의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$a+\dfrac{4}{a-1}=a-1+\dfrac{4}{a-1}+1$

산술기하조건을 이용하면

$a-1+\dfrac{4}{a-1}\geq 2\sqrt{(a-1)\times\dfrac{4}{a-1}}=4$

$\therefore$ 최솟값은 $4+1=5$

16. $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x+2$일 때, $f(2)$의 값을 구하면?

① 2　② 3　③ 8　④ 11　⑤ 12

해설

$\frac{x+1}{2}=2$에서 $x=3$

$\therefore f(2)=11$

17. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

(가) 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 의 각 원소 에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩만 대응 할 때, 이 대응을 X 에서 Y 로의 함수라고 한다. (나) 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 f, g 가 $f(x) = x$, $g(x) = \|x\|$ 일 때, 두 함수 f 와 g 는 서로 같은 함수이다. (다) 일차함수 $y = 2x + 5$ 는 일대일 대응이다.

① (가) ② (가), (나) ③ (나), (다)

④ (가), (다) ⑤ (가), (나), (다)

해설

(가), (다) : 참

(나) : $f(x)$ 의 치역은 $\{1, 0, -1\}$

$g(x)$ 의 치역은 $\{0, 1\}$ 이므로 $f \neq g$

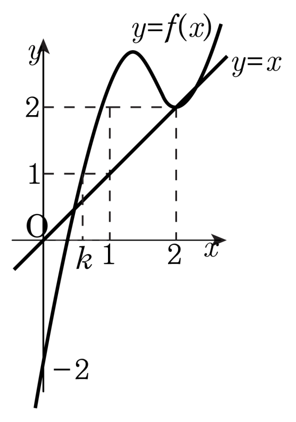
18. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x\text{가 짝수일 때}) \\ -x+5 & (x\text{가 홀수일 때}) \end{cases}$ 일 때, $(f \circ f)(3)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(3) &= f(f(3)) = f(-3+5) \\ &= f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

19. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f,\ f^3 = f^2 \circ f,\ f^n = f^{n-1} \circ f$)



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 5　　⑤ 11

해설

$f(k) = 1$

$f^2(k) = f(f(k)) = f(1) = 2$

$f^3(k) = f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1)$

$\quad = f(f(1)) = f(2) = 2$

$\vdots$

$f^{10}(k) = 2$

20. 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(a)+f(b)=f(ab)$ 인 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(2)=\alpha$, $f(3)=\beta$ 이고, f 의 역함수를 g 라 할 때, $g(\alpha+\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(a)+f(b)=f(ab)$ 에 $a=2$, $b=3$ 을 대입하면
$f(2)+f(3)=f(6)$
$\therefore$ $f(6)=\alpha+\beta$
$\therefore$ $f^{-1}(\alpha+\beta)=6$
$\therefore$ $g(\alpha+\beta)=6$

21. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{x}$일 때, $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = 2$와 $(g^{-1} \circ f^{-1})(b) = 2$를 만족하는 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-2$

해설

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{x}$ 일 때,

$(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = (g \circ f)^{-1}(a) = 2$

$\rightarrow$ $(g \circ f)(2) = a$

$\therefore$ $a = g\{f(2)\} = g(-1) = -1$ ($\because$ $f(2) = -1$)

$(g^{-1} \circ f^{-1})(b) = (f \circ g)^{-1}(b) = 2$

$\rightarrow$ $(f \circ g)(2) = b$

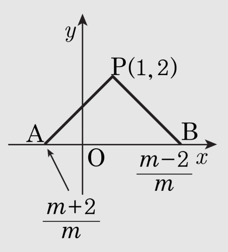
$\therefore$ $b = f\{g(2)\} = f(2) = -1$ ($\because$ $g(2) = 2$)

$\therefore$ $a = -1$, $b = -1$ $\rightarrow$ $a+b = -2$

22. 직선 $y = m|x-1|+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$　　② $\frac{2}{5}$　　③ $-\frac{1}{5}$　　④ $-\frac{2}{5}$　　⑤ 1

해설



$y = m|x-1|+2$

i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.

x절편은 ㉠에서 $x = \frac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = \frac{-4}{m}$

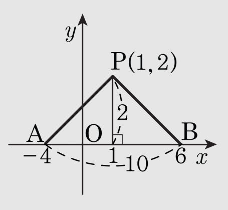
∴ △PAB의 면적이 10이므로

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\frac{2}{5}$

해설



삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

$\overline{AB} = 10$

즉 그래프의 x절편이 −4, 6이다.

$y = m|x-1|+2$에 (6, 0)을 대입하면

$0 = m|6-1|+2$, $5m = -2$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$

23. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$을 만족시키는 실수 a, b, c에 대하여 다음 식의 값은?

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=0,\ ab+bc+ca=0$

$(\because abc \neq 0)$

$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$

24. $a+b=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{c+a}{3}$ 일 때, $\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ 의 값은? (단, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$)

① $\dfrac{5}{6}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{5}$ ④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 3

해설

$a+b=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{c+a}{3}=k$라 두면

$a+b=k,\ b+c=2k,\ c+a=3k$

$a+b+c=3k$

$a=k,\ b=0,\ c=2k$

$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{2k^2}{5k^2}=\dfrac{2}{5}$

25. $-1 < a < 3$ 일 때, $\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-6a+9}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(준식) $= \sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$

$=|a+1|+|a-3|=(a+1)-(a-3)=4$

26. $\sqrt{4+\sqrt{12}}$의 소수 부분을 p라고 할 때, $2\left(p-\dfrac{1}{p}\right)$의 값은?

① $\sqrt{3}$　　② 3　　③ $3-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}-3$　　⑤ $2-\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$$
$$= \sqrt{3}+1\ \sqrt{3}+1 = 2.\cdots$$
$$\therefore P = \sqrt{3}-1 \Rightarrow 2\left(P-\frac{1}{P}\right)$$
$$= 2\left(\sqrt{3}-1-\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)$$
$$= 2\left(\sqrt{3}-1-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$
$$= \sqrt{3}-3$$

27. $0 \le a < 2$ 이고 $x = \dfrac{4a}{a^2+4}$ 일 때
$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1+\frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1-\frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4>0$ 이고 $0<a<2$ 이므로

$a+2>0,\ a-2<0$

$$\therefore\ \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\therefore\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} = \frac{4}{\sqrt{a^2+4}}$$

$\therefore\ a=0$ 일 때 최댓값 2

28. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x = \sqrt{5}+1$

$2x - 1 = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore\ x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore\ x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$

29. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{-x+b}$ 의 그래프의 점근선이 $x=2, y=-1$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=\dfrac{ax+1}{-(x-b)}$ 의 점근선이 $x=2, y=-1$ 이므로

$b=2$ 이고

$y=\dfrac{a(x-2)+2a+1}{-(x-2)}=\dfrac{2a+1}{-(x-2)}-a$ 에서

$-a=-1$ 이므로

$\therefore a+b=1+2=3$

30. 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

① $a - d = 0$　　② $a + d = 0$　　③ $ad = 1$
④ $ad = -1$　　⑤ $ad - bc = 0$

해설

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+b) - \frac{ab}{c} + b}{cx+d}$$

$$= \frac{\frac{b}{c}(c-a)}{cx+d} + \frac{a}{c} = \frac{b(c-a)}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}$$

주어진 분수함수의 점근선은

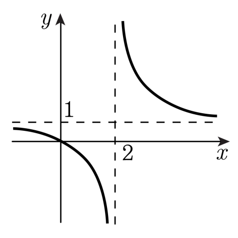
$x = -\dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{a}{c}$ 이므로

그래프는 점 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ 에 대하여 대칭이다. 이때, 이 분수함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ 은 직선 $y = x$ 위에 있다.

$\therefore \dfrac{a}{c} = -\dfrac{d}{c}$, $a = -d$

$\therefore a + d = 0$

31. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 다음과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하면?



① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$ 이므로

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}=a+\dfrac{b-ac}{x+c}$ 에서 $a=1,\ c=-2$ 이다.

그리고 원점을 지나므로 $b=0$ 이다.

$\therefore\ a+b+c=-1$

32. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(d>0)$ 와 $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f\circ g)(x)=x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x=m, y=n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ $-\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f\circ g=I$ 이므로
$g=f^{-1}$ 또는 $g^{-1}=f$
$y=g(x)$ 의 역함수를 구하면

$y=\dfrac{x+2}{3x+4}\Leftrightarrow 3yx+4y=x+2$

$\Leftrightarrow (3y-1)x=-4y+2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4y+2}{3y-1}$

$\therefore y=g^{-1}(x)=\dfrac{-4x+2}{3x-1},$

$$\begin{aligned} f(x)&=g^{-1}(x)\\ &=\frac{-4x+2}{3x-1}\\ &=\frac{ax+b}{cx+d}(d>0)\text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{4x-2}{-3x+1}\\ &=\frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}\\ &=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m=\dfrac{1}{3}$, $n=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m+n=-1$

33. $x \geq -1$ 인 실수 x에 대하여 $f(x) = \sqrt{x+1}$로 정의된 함수 f의 역함수를 f^{-1}이라고 할 때 모든 양수 t에 대하여 $\dfrac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2}$를 옳게 나타낸 것은?

① $\dfrac{1}{t+1}$ ② $\dfrac{t}{t+1}$ ③ $\dfrac{2t-2}{t+1}$

④ $\dfrac{t-1}{t+1}$ ⑤ $\dfrac{2t}{t-1}$

해설

$f(x) = \sqrt{x+1}$ $(x \geq -1)$에서

역함수 $f^{-1}(x)$를 구하여 $f^{-1}(t)$로 나타내면

$y = \sqrt{x+1} \rightarrow y^2 = x+1 \rightarrow x = y^2 - 1$

$\therefore f^{-1}(x) = x^2 - 1$ $(x \geq 0)$

$\therefore f^{-1}(t) = t^2 - 1$

$$\therefore \frac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2} = \frac{t^2-1}{(t+1)^2} = \frac{t-1}{t+1}$$