

1. 다음 중에서 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 과 같은 집합을 모두 고른 것은?

- ㉠ $\{2n \mid 0 < n < 5 \text{인 정수}\}$

㉡ $\{x \mid x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$

㉢ $\{2x - 2 \mid x \text{는 } 1 < x \leq 5 \text{인 정수}\}$

㉣ $\{x \mid x \text{는 } 8\text{의 양의 약수}\}$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣ ④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉣

해설

- ㉠ 2, 4, 6, 8이므로 가능하다.
- ㉡ 2, 4, 6, 8, 10, ... 이므로 불가능하다.
- ㉢ 2, 4, 6, 8이므로 가능하다.
- ㉣ 1, 2, 4, 8이므로 불가능하다.

2. 다음 세계지도를 보고 5대양, 6대륙을 각각 원소나열법으로 나타내어라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5대양 : {인도양, 태평양, 대서양, 북극해, 남극해}

▷ 정답 : 6대륙 : {유럽, 아프리카, 아시아, 북아메리카, 남아메리카, 오세아니아}

해설

5대양 : {인도양, 태평양, 대서양, 북극해, 남극해}

6대륙 : {유럽, 아프리카, 아시아, 북아메리카, 남아메리카, 오세아니아}

3. 다음 집합을 조건 제시법으로 나타내어라.

- (1) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
- (2) {1, 2, 4, 5, 10, 20}
- (3) {6, 7, 8, 9}
- (4) {1, 3, 5, 7, 9}
- (5) {5, 10, 15}

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : (1) { $x \mid x$ 는 한 자리의 자연수}

▷ 정답 : (2) { $x \mid x$ 는 20의 약수}

▷ 정답 : (3) { $x \mid x$ 는 5보다 크고 10보다 작은 자연수}

▷ 정답 : (4) { $x \mid x$ 는 9 이하의 홀수}

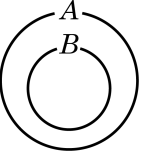
▷ 정답 : (5) { $x \mid x$ 는 15 이하의 5의 배수}

해설

나열된 원소들의 공통성질을 찾는다.

- (1) { $x \mid x$ 는 한 자리의 자연수}
- (2) { $x \mid x$ 는 20의 약수}
- (3) { $x \mid x$ 는 5보다 크고 10보다 작은 자연수}
- (4) { $x \mid x$ 는 9 이하의 홀수}
- (5) { $x \mid x$ 는 15 이하의 5의 배수}

4. 집합 B 가 $\{1, 3, 7\}$ 일 때, 다음 중 아래 벤 다이어그램을 만족하는 집합 A 가 될 수 있는 것은?



- ① $\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{보다 작은 자연수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{의 약수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{이하의 소수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{이하의 홀수}\}$

해설

- ① $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$
- ② $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ③ $\{1, 7\}$
- ④ $\{2, 3, 5, 7\}$
- ⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

5. 다음 두 집합 사이의 관계를 기호 $\subset$, $\not\subset$ 를 써서 나타내어라.

- (1) $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{5, 7\}$
(2) $A = \{6, 8, 10, 12\}$, $B = \{9, 11, 13, 15\}$
(3) $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수}\}$
(4) $A = \{a, c, e\}$, $B = \{a, c, e, f\}$
(5) $A = \{1, 5, 10\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $B \subset A$

▷ 정답 : $A \not\subset B, B \not\subset A$

▷ 정답 : $B \subset A$

▷ 정답 : $A \subset B$

▷ 정답 : $A \subset B$

해설

- (1) 집합 B 의 원소 5, 7이 모두 집합 A 에 속하므로 $B \subset A$
(2) $A = \{6, 8, 10, 12\}$, $B = \{9, 11, 13, 15\}$
 $\therefore A \not\subset B, B \not\subset A$
(3) $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 4\}$
집합 B 의 원소 1, 2, 4가 모두 집합 A 에 속하므로 $B \subset A$
(4) 집합 A 의 원소가 모두 집합 B 에 속하므로 $A \subset B$
(5) $A = \{1, 5, 10\}$, $B = \{1, 2, 5, 10\}$
집합 A 의 원소 1, 5, 10이 모두 집합 B 에 속하므로 $A \subset B$

6. 다음 안에 $\in, \subset$ 중 알맞은 것을 써 넣어라.

- (1) $\{c, d\}$ $\{a, b, c, d\}$
(2) $\emptyset$ $\{0\}$
(3) e $\{c, e\}$
(4) $\{3\}$ $\{1, 3, 5\}$
(5) 3 $\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 약수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\subset$

▷ 정답 : $\subset$

▷ 정답 : $\in$

▷ 정답 : $\subset$

▷ 정답 : $\in$

해설

- (1) $\{c, d\}$ 은 $\{a, b, c, d\}$ 의 부분집합이므로
 $\{c, d\} \subset \{a, b, c, d\}$
(2) $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset \{0\}$
(3) e 는 $\{c, e\}$ 의 원소이므로 $e \in \{c, e\}$
(4) $\{3\}$ 은 $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합이므로
 $\{3\} \subset \{1, 3, 5\}$
(5) 3 은 $\{1, 3\}$ 의 원소이므로 $3 \in \{1, 3\}$

7. 세 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) - C$ 는?

① $\{4\}$

② $\{2, 4\}$

③ $\{4, 8\}$

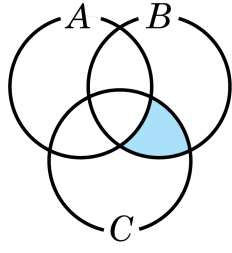
④ $\{2, 8\}$

⑤ $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$ 이다.

8. 다음 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $A \cap B \cap C$
- ② $(B \cup C) - A$
- ③ $(A \cup C) - B$
- ④ $C - (A \cup B)$
- ⑤ $(B \cap C) - A$

해설

①

②

③

④

9. 세 집합 $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, $C = \{4, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 $(A - B) \cap C$ 는?

① $\{3\}$

② $\{8\}$

③ $\{3, 8\}$

④ $\{3, 8, 9\}$

⑤ $\{3, 5, 7\}$

해설

$(A - B) \cap C = \{2, 5, 8\} \cap \{4, 7, 8, 9\} = \{8\}$ 이다.

11. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \leq 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가)조건이다.
 - $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나)조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$,
 $Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면
 $P \subset Q$, $\therefore$ 충분조건
 $R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,
 $S = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\}$ 라고 하면
 $R = S$, $\therefore$ 필요충분조건

12. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

- ① 충분조건
- ② 필요조건
- ③ 대우
- ④ 필요충분조건
- ⑤ 아무조건도 아니다.

해설

정삼각형 $\subset$ 이등변삼각형

13. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

14. 양수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2 + b^2 = 1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

15. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

16. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

17. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $5 \times 3 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

18. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (-1)^2 + 4^2\}(x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x - y + 4z)^2$
 $18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

19. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 10 개 ② 8 개 ③ 6 개 ④ 4 개 ⑤ 2 개

해설

$A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$,

$(A \cap B) \cup X = X$ 에서 $(A \cap B) \subset X$ 이므로

$(A \cap B) \subset X \subset A$

집합 X 는 3, 4 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로
그 개수는 $2^2 = 4$ (개)

20. 두 집합 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6, 9\}$ 에 대하여 $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 4 개

해설

집합 X 는 원소 2, 6 을 포함하는 $A \cup B = \{2, 4, 6, 9\}$ 의 부분집합이므로 X 의 개수는 $A \cup B = \{2, 4, 6, 9\}$ 에서 원소 2, 6 를 뺀 $\{4, 9\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^2 = 4$ (개)이다.

21. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) \subset X \subset U$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 4 개 ④ 8 개 ⑤ 16 개

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로, 집합 X 는 원소 2, 5를 포함하는 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합이다.
따라서 X 의 개수는 U 에서 원소 2, 5 를 뺀 $\{1, 3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개) 이다.

22. 자연수를 원소로 가지는 집합 S 가 조건 ' $x \in S$ 이면 $(4 - x) \in S$ 이다.' 를 만족한다. 이 때, 집합 S 의 개수는?

- ① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

집합 S 의 원소는 자연수이어야 하므로 x 가 자연수이어야 한다.
또한, 조건 ' $x \in S$ 이면 $(4 - x) \in S$ '로부터 x 가 S 의 원소이면 $(4 - x)$ 도 S 의 원소이므로 $(4 - x)$ 도 자연수이다. $1 \in S$ 이면 $(4 - 1) \in S$, 즉 $3 \in S$, $2 \in S$ 이면 $(4 - 2) \in S$, 즉 $2 \in S$, $3 \in S$ 이면 $(4 - 3) \in S$, 즉 $1 \in S$ 이므로 1과 3은 동시에 S 의 원소이거나 S 의 원소가 아니어야 한다.

한편, 2는 혼자서 S 의 원소이거나 S 의 원소가 아닐 수 있다.
따라서 두 집합 $S_1 = \{2\}$, $S_2 = \{1, 3\}$ 의 원소들을 동시에 갖거나 갖지 않는 모든 집합들을 보면 S_1 만을 가질 때에는 $\{2\}$, S_2 만을 가질 때에는 $\{1, 3\}$, S_1 , S_2 를 모두 가질 때에는 $\{1, 2, 3\}$ 이다.
따라서 3개이다.

23. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

- $(\heartsuit) 1 \in A$
 $(\spadesuit) a \in A \text{ 이면 } \sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- $\textcircled{1}$ 집합 A 는 유한집합이다.
 $\textcircled{2}$ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.
 $\textcircled{3}$ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

- $\textcircled{1} \textcircled{1}$ $\textcircled{2} \textcircled{2}$ $\textcircled{3} \textcircled{3}$ $\textcircled{4} \textcircled{1}, \textcircled{2}$ $\textcircled{5} \textcircled{2}, \textcircled{3}$

해설

- $\textcircled{1}$ 조건 $(\heartsuit)$ 에서 $1 \in A$ 이므로 조건 $(\spadesuit)$ 에 의하여
 $\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^3 \in A, \dots$,
즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의
원소이므로 A 는 무한집합이다.
 $\textcircled{2}$ $\textcircled{1}$ 에서 $(\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^4 \in A, (\sqrt{2})^6 \in A, \dots$,
즉 $2 \in A, 2^2 \in A, 2^3 \in A, \dots$ 이므로 임의의 자연수 n 에
대하여 $2^n \in A$ 이다.
 $\textcircled{3}$ (반례)
집합 $A = \{0, 1, \sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, \dots\}$ 은 주어진 조건 $(\heartsuit),$
 $(\spadesuit)$ 를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.
이상에서 옳은 것은 $\textcircled{2}$ 뿐이다.

24. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ 의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A 라 할 때 $n(A)$ 를 구하면?

- ㉠ $2 \in A$
- ㉡ $m, n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$
 $2 \in A$, $2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$
이와 같은 과정을 반복하면
 $2^4 \in A$, $2^5 \in A$, $2^6 \in A, \dots$
따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ 이다.