1. 집합 $X = \{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

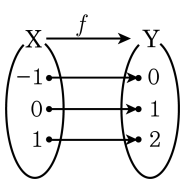
해설

$f(-1) = 1 + k$
$f(1) = -1 + k$
$f(3) = -3 + k$
이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.
$\therefore X = \{1 + k,\ -1 + k,\ -3 + k\}$
그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로
$X = \{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서
$-3 + k = -1,\ -1 + k = 1,\ 1 + k = 3$
$\therefore k = 2$

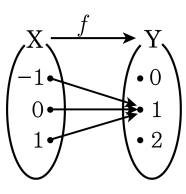
2. 다음 보기의 함수가 어떤 함수인지 말한 것 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

보기

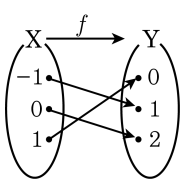
㉠



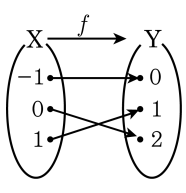
㉡



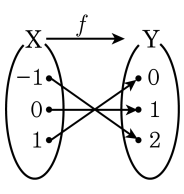
㉢



㉣



㉤



① ㉠ 항등함수
② ㉡ 상수함수
③ ㉢ 일대일 대응
④ ㉣ 상수함수
⑤ ㉤ 일대일 대응

해설

일대일 대응 : ㉠, ㉢ , ㉣
상수함수 : ㉡

3. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{5,\ 6,\ 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$

4. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x\in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
$f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키려면
-1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지.
0 이 대응할 수 있는 원소는
$f(-0)=-f(0)$ 에서, $2f(0)=0$,
즉 0 의 1 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5\times1\times1=5$ (개)

5. 함수 $y = \dfrac{k}{x-1} + 3$ $(k \neq 0)$ 의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $k > 0$ 이면 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지난다.

㉡ $k < 0$ 이면 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

㉢ $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

점근선은 $x = 1, y = 3$ 이다.
㉠, ㉢ : $0 < k \leq 3$ 이면, 제 $1, 2, 4$ 사분면을 지난다.
$k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.
㉡ : $k < 0$ 이면, 제 $1, 2, 4$ 사분면을 지난다.
$\therefore$ ㉡, ㉢ 이 참.

6. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{-x+b}$ 의 그래프의 점근선이 $x=2, y=-1$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=\dfrac{ax+1}{-(x-b)}$ 의 점근선이 $x=2, y=-1$ 이므로

$b=2$ 이고

$y=\dfrac{a(x-2)+2a+1}{-(x-2)}=\dfrac{2a+1}{-(x-2)}-a$ 에서

$-a=-1$ 이므로

$\therefore a+b=1+2=3$

7. 보기의 함수 중 평행이동한 그래프가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=\frac{-x-1}{x-1}$ ㉡ $y=\frac{x}{x-1}$ ㉢ $y=\frac{-2x-1}{x+1}$

① ㉡ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축으로 α만큼,

y축으로 β만큼 평행이동시키면

$y=\frac{1}{x-\alpha}+\beta$꼴이 된다.

㉠ $y=\frac{-x-1}{x-1}=\frac{-(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}-1$

㉡ $y=\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$

㉢ $y=\frac{-2x-1}{x+1}=\frac{-2(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-2$

따라서, 구하는 함수는 ㉡, ㉢이다.

8. 분수함수 $y=\dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x=-1$ 이고 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, $a,\ b$ 는 상수)

① $\{y \mid y<0$ 또는 $y>2\}$ ② $\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$

③ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$ ④ $\{y \mid y<1$ 또는 $1<y \le 2\}$

⑤ $\{y \mid y<1$ 또는 $y \ge 2\}$

해설

분수함수 $y=\dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x=-1$ 이므로

$x=-\dfrac{1}{a}=-1$

$\therefore\ a=1$

따라서, 주어진 분수함수는 $y=\dfrac{x+b}{x+1}$ 이고

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로

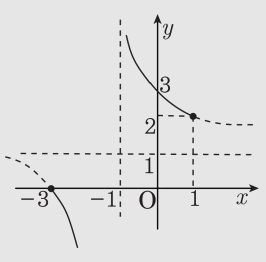
$2=\dfrac{1+b}{1+1}\quad \therefore b=3$

$\therefore\ y=\dfrac{x+3}{x+1}$

따라서 $-3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1$ 에서

$y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$



9. 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프는 점 (a,b)에 대해 대칭인 그래프이다. 이 때 $a+b$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ -3 ⑤ -1

해설

함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프가 점 (a,b)에서
대칭이므로 $x=a,\ y=b$를 점근선으로 한다.
$y=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$
따라서 $a=1,\ b=2$이므로
$\therefore a+b=1+2=3$

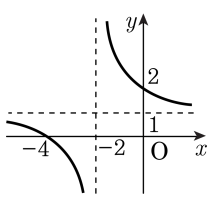
10. 함수 $y = \dfrac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(1,2)$를 지나고 $x = 3,\ y = 1$을 점근선으로 할 때, 상수 a, b, c에 대해서 $a - b - c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점근선이 $x = 3,\ y = 1$이므로
$a = -3,\ b = 1$이다.
그리고 점 $(1,2)$를 지나므로,
$2 = \dfrac{1+c}{1-3},\ c = -5$
$\therefore\ a - b - c = 1$

11. 함수 $y=\dfrac{c-x}{ax+b}$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① -1 ② -2 ③ -4

④ -7 ⑤ 0

해설

점근선이 $x=-2,\ y=1$이므로

$y=\dfrac{k}{x+2}+1\cdots\cdots$①

①이 $(0,\ 2)$를 지나므로 대입하면 $k=2$

$y=\dfrac{2}{x+2}+1=\dfrac{-x-4}{-x-2}$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2,\ c=-4$

12. $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{x-2}{x+2}$ 일 때, $f(2)$의 값은?

① -5 ② -3 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{x-2}{x+2}$ 일 때,

$\dfrac{x-1}{x+1}=2$ 에서 $(x-1)=2(x+1)$

$x-1=2x+2$

$\therefore\ x=-3$

이것을 주어진 식에 대입하면

$f(2)=\dfrac{-3-2}{-3+2}=\dfrac{-5}{-1}=5$

13. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{2x+b}$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, a, b 사이의 관계식은? (단, a, b 는 상수이다.)

① $a-b=0$ ② $a+b=0$ ③ $a-b=1$

④ $a+b=1$ ⑤ $ab=1$

해설

$y=\dfrac{ax+1}{2x+b}$ …㉠의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 역함수의 그래프와 일치한다.

역함수를 구하면 $y=\dfrac{-bx+1}{2x-a}$ 이므로

이것이 ㉠과 같으려면

$\dfrac{ax+1}{2x+b}=\dfrac{-bx+1}{2x-a}$ 에서 $a=-b$

$\therefore a+b=0$

14. 다음과 같은 두 집합 A, B에 대하여 $A \cap B = \varnothing$ 일때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

$$A = \left\{(x,\ y) \mid y = \frac{|x-1|}{x}\right\}$$
$$B = \{(x,y) \mid y = ax\}$$

① $a < 0$ ② $a > 0$ ③ $0 < a < 1$
④ $0 \le a \le 1$ ⑤ $a < 0, a > 1$

해설

$y = \frac{|x-1|}{x}$ 에서

$x \ge 1$ 일 때,

$y = \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x} + 1$

$x < 1$ 일 때, $y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$

$A \cap B = \varnothing$ 이려면 위의 곡선과 원점을 지나는
직선 $y = ax$가 만나지 않아야 하므로 ,
윗쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만
존재해야 한다.
따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a < 0$