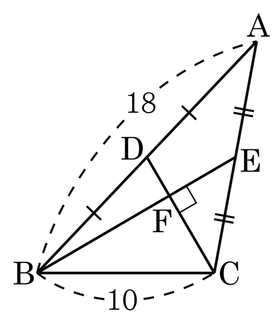
1. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 의 중점을 각각 D, E 라고 하고 $\overline{BE} \perp \overline{CD}$, $\overline{AB} = 18$, $\overline{BC} = 10$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이를 구하면?



① $2\sqrt{11}$ ② $3\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{11}$ ④ $5\sqrt{11}$ ⑤ $6\sqrt{11}$

해설

$\overline{DE}$ 를 그으면 중점연결 정리에 의하여

$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 5$ 이다.

□DBCE 는 대각선이 직교하는 사각형이므로

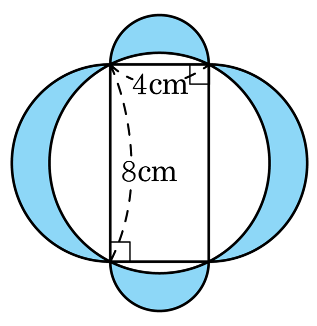
$\overline{BD}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BC}^2$

$81 + \overline{EC}^2 = 25 + 100$

$\therefore \overline{EC} = 2\sqrt{11} (\because \overline{EC} > 0)$

$\therefore \overline{AC} = 2 \times 2\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$

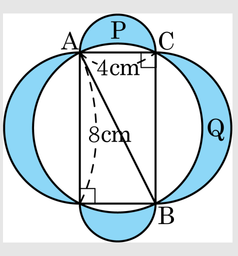
2. 다음 그림과 같이 원에 내접하는 직사각형의 각 변을 지름으로 하는 반원을 그릴 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : ________ cm^2

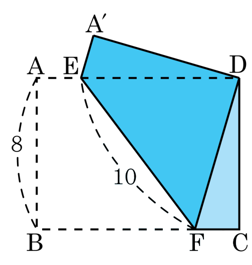
▷ 정답 : $32\ \mathrm{cm}^2$

해설



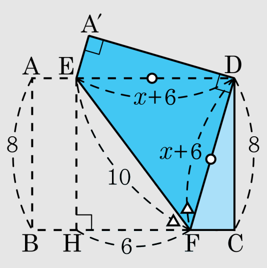
색칠한 부분 P + Q 의 넓이는 △ABC 의 넓이와 같다.
따라서 색칠한 전체 넓이는 직사각형의 넓이와 같다.
$\therefore\ 4 \times 8 = 32(\mathrm{cm}^2)$

3. 다음 그림은 직사각형 ABCD 의 점 B 가 점 D 에 오도록 접은 것이다. $\overline{BC}$ 의 길이는?



① $\frac{32}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ $\frac{26}{3}$
④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설



E 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{HF} = 6$
$\overline{CF} = x$ 라 하면 $\overline{CH} = \overline{DE} = 6 + x$
접은 각과 엇각에 의해 $\angle DEF = \angle DFE$ 이므로
$\overline{DF} = \overline{DE} = 6 + x$
$\triangle DFC$ 에서 $(6 + x)^2 = 8^2 + x^2, 12x = 28$ $\therefore x = \frac{7}{3}$
또한 $\overline{BH} = \overline{AE} = \overline{A'E} = \overline{CF}$
$\therefore \overline{BC} = \frac{7}{3} \times 2 + 6 = \frac{32}{3}$

4. 세 변의 길이가 $5, x, 13$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되기 위한 정수 x 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 92

해설

㉠ 13 이 가장 긴 변일 때($x \le 13$)

$13^2 > 5^2 + x^2, \quad x < 12$

$5 + x > 13, \quad x > 8 \quad \therefore\ 8 < x < 12$

㉡ x 가 가장 긴 변일 때($x > 13$)

$x^2 > 13^2 + 5^2 = 194, \quad x > \sqrt{194}$

$5 + 13 < x, \quad x > 18 \quad \therefore\ \sqrt{194} < x < 18$

㉠, ㉡에 의하여

$8 < x < 12$ 또는 $\sqrt{194} < x < 18$

$13 < \sqrt{194} < 14$ 이므로 구하는 정수의 합은

$9 + 10 + 11 + 14 + 15 + 16 + 17 = 92$

5. 자연수 m, n 에 대하여 세 변의 길이가 각각 $2n+1$, $2n+51$, m 인 삼각형은 직각삼각형이다. m 이 최솟값을 가질 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $n=5$

해설

세 변의 길이가 $2n+1$, $2n+51$, m 일 때, m 이 최솟값을 가질 때는 $2n+51$ 이 빗변인 경우이다.

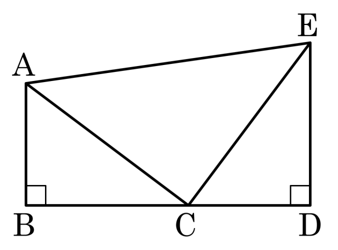
$(2n+51)^2=(2n+1)^2+m^2$

$\therefore\ m=10\sqrt{2n+26}$

그런데 m 이 자연수이므로 $2n+26$ 이 완전제곱수가 되어야 한다. 따라서 $2n+26=36$ 에서 $n=5$ 일 때, m 은 최솟값 60 을 가진다.

$\therefore\ n=5$

6. 다음 그림에서 $\triangle ABC \equiv \triangle CDE$ 이고 세 점 B, C, D 는 일직선 위에 있다. $\overline{AB} = 6\text{cm}$ 이고, $\triangle CDE$ 의 넓이가 24 일 때, 사다리꼴 ABDE 의 둘레의 길이는?

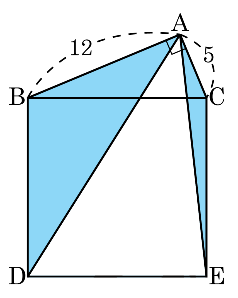


① $28 + 10\sqrt{2}$
② $12 + 8\sqrt{3} + 10\sqrt{2}$
③ $48 + 10\sqrt{2}$
④ $12 + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{21}$
⑤ $10 + 8\sqrt{2} + \sqrt{21}$

해설

$\triangle ABC \equiv \triangle CDE$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{DE}$ 이다.
$\triangle CDE$ 의 넓이가 24 이므로
$\triangle CDE = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \overline{DE} = 24$
$\therefore \overline{DE} = 8$
$\overline{AB} = \overline{CD} = 6$, $\overline{BC} = \overline{DE} = 8$
또, $\triangle ABC$ 와 $\triangle CDE$ 는 합동이므로
$\overline{AC} = \overline{CE}$ 이고 $\angle ACE = 90°$ 이므로 $\triangle ACE$ 는 직각이등변삼각형이다.
$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ 이고, $\overline{AE} = 10\sqrt{2}$ 이다.
따라서 사다리꼴 둘레의 길이는
$6 + 6 + 8 + 8 + 10\sqrt{2} = 28 + 10\sqrt{2}$

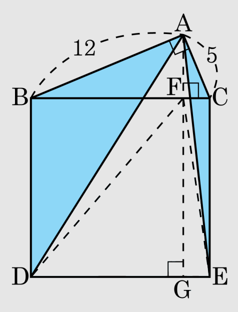
7. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = 12$, $\overline{AC} = 5$ 인 $\triangle ABC$ 가 있다. $\overline{BC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형 BDEC 를 그렸을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{169}{2}$

해설



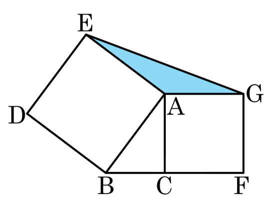
$\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

그림에서 $\triangle ABD = \triangle FBD$, $\triangle ACE = \triangle FCE$ 이다.

$\therefore \triangle ABD + \triangle ACE = \triangle FBD + \triangle FCE$

$$\begin{aligned} \triangle FBD + \triangle FCE &= \frac{1}{2}\square BDGF + \frac{1}{2}\square FGEC \\ &= \frac{1}{2}\square BDEC \\ &= \frac{1}{2} \times 13^2 \\ &= \frac{169}{2} \end{aligned}$$

8. 다음 그림은 $\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 8$ 인 직각삼각형 ABC 의 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 ABDE 와 ACFG 이다. 이때 삼각형 AEG 의 넓이를 구하여라.

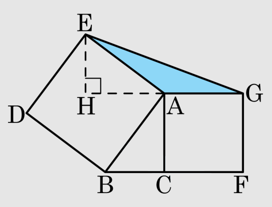


▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

점 E 에서 $\overline{AG}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle$HAE 와 $\triangle$ABC 에서

$\overline{AE} = \overline{AB}$, $\angle EHA = \angle ACB = 90°$,

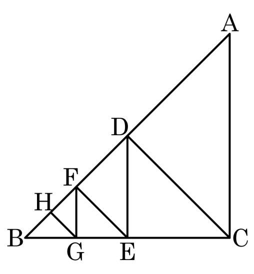
$\angle EAH = 90 - \angle HAB = \angle CAB$

$\therefore$ $\triangle HAE \equiv \triangle ABC$ (RHA합동)

$\therefore$ $\overline{EH} = \overline{BC} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

따라서 삼각형 AEG 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ 이다.

9. 다음 그림과 같이 $\overline{AC} = \overline{BC} = 4$ 인 직각이등변삼각형 ABC 의 점 C 에서 변 AB 에 내린 수선의 발을 D, 점 D 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 E, 점 E 에서 변 AB 에 내린 수선의 발을 F, 점 F 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 G, 점 G 에서 변 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 삼각형 BHG 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}$

해설

$\triangle$ABC 가 직각이등변삼각형이므로 $\triangle$HBG, $\triangle$HFG, $\triangle$FGE, $\triangle$FED, $\triangle$DEC, $\triangle$DCA 도 모두 직각이등변삼각형이다.

$\overline{HB} = a$ 로 놓으면

$\overline{FG} = \overline{EG} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$

$\overline{EF} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$

$\overline{DE} = \overline{CE} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2\sqrt{2}a$

$\overline{DC} = \overline{AD} = \sqrt{8a^2 + 8a^2} = 4a$

$\overline{AC} = \sqrt{16a^2 + 16a^2} = 4\sqrt{2}a$

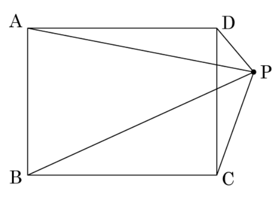
$\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로

$\therefore\ 4\sqrt{2}a = 4,\ a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 BHG 의 넓이는

$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 이다.

10. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 의 외부에 잡은 한 점 P 와 사각형의 각 꼭짓점을 연결하였다. $\overline{\mathrm{PA}} = 9$, $\overline{\mathrm{PB}} = 10$, $\overline{\mathrm{PD}} = 2$ 일 때, $\overline{\mathrm{PC}}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{23}$

해설

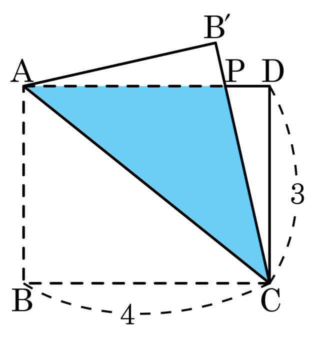
$\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$ 이므로

$9^2 + \overline{\mathrm{PC}^2} = 10^2 + 2^2$

$\overline{\mathrm{PC}^2} = 104 - 81 = 23$

$\overline{\mathrm{PC}} = \sqrt{23}$ $(\because \overline{\mathrm{PC}} > 0)$

11. 다음 그림은 가로, 세로의 길이가 각각 4 cm, 3 cm 인 직사각형 모양의 종이를 대각선 AC 를 접는 선으로 하여 접은 것이다. 변 B′C 가 변 AD 와 만나는 점을 P 라고 할 때, △ACP 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm^2

▷ 정답 : $\frac{75}{16}$ cm^2

해설

$\overline{AP}$ 의 길이를 $x$cm 라 하면

$\overline{PD} = 4 - x(cm)$

△AB′P 와 △CDP 는 서로 합동이므로

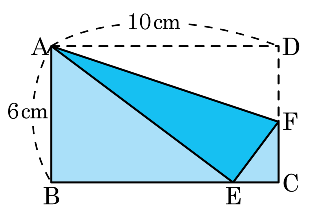
$\overline{PD} = \overline{PB'} = 4 - x(cm)$

$x^2 = (4 - x)^2 + 3^2$,$x = \frac{25}{8}$

(△ACP 의 넓이)

$= 6 - \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} \times 3 = \frac{75}{16}(cm^2)$

12. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 6cm$, $\overline{AD} = 10cm$ 인 직사각형 모양의 종이를 점 D 가 $\overline{BC}$ 위에 오도록 접었을 때, $\overline{EF}$ 의 길이를 구하여라.



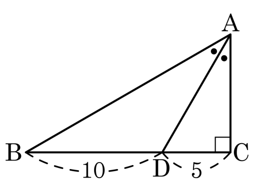
▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $\frac{10}{3}$ cm

해설

$\triangle ADF \equiv \triangle AEF$ 이므로 $\overline{EF} = \overline{DF} = x(cm)$ 라 하면
$\overline{AE} = \overline{AD} = 10(cm)$, $\overline{AB} = 6(cm)$ 이므로
$\triangle ABE$ 에서 $\overline{BE} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(cm)$
$\therefore\ \overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = 10 - 8 = 2(cm)$
$\overline{CF} = \overline{CD} - \overline{DF} = 6 - x(cm)$
$\triangle ECF$ 에서 $x^2 = 2^2 + (6 - x)^2$, $12x = 40$,
$\therefore x = \frac{10}{3}(cm)$

13. 다음 그림과 같이 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 할 때, $\overline{BD} = 10$, $\overline{DC} = 5$ 이다. $\overline{AD}$ 의 길이를 구하여라.



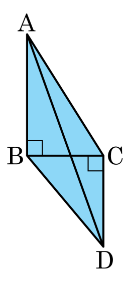
▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 10 : 5,\ \overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1$ 이다.
$\overline{AB} = 2x,\ \overline{AC} = x\ (x > 0)$ 라 하면
$(2x)^2 = x^2 + 15^2$
$3x^2 = 225$
$x = 5\sqrt{3}$
$\therefore\ \overline{AC} = 5\sqrt{3}$
따라서 $\triangle ACD$ 에서
$\overline{AD} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = 10$ 이다.

14. 다음 그림과 같이 $\angle ABC = \angle BCD = 90°$, $\overline{BC} = 5$ 이고, 삼각형 ABC 와 BCD 의 넓이가 각각 20, 15 일 때, 선분 AD 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{221}$

해설

$\triangle ABC = 20, \triangle BCD = 15$ 이고,
$\overline{BC} = 5$ 이므로
$\overline{AB} = 8,\ \overline{CD} = 6 \quad \overline{AE} = 8 + 6 = 14$
$\therefore\ \overline{AD} = \sqrt{14^2 + 5^2} = \sqrt{221}$