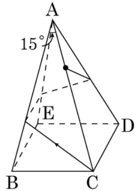
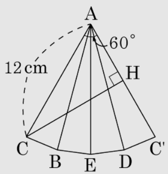
1. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\angle BAC = 15°$ 인 정사각뿔이 있다. 점 C 에서 옆면을 지나 $\overline{AC}$ 에 이르는 최단거리를 구하면?



① $3\sqrt{3}\text{cm}$　　② $4\sqrt{3}\text{cm}$　　③ $5\sqrt{3}\text{cm}$

④ $6\sqrt{3}\text{cm}$　　⑤ $7\sqrt{3}\text{cm}$

해설

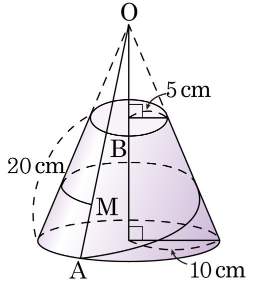


옆면의 전개도를 그려 생각하면, 점 C 에서 $\overline{AC'}$ 에 내린 수선 $\overline{CH}$ 의 길이가 최단거리가 된다.

$\overline{AC} : \overline{CH} = 2 : \sqrt{3}$ 이므로

$$\therefore \overline{CH} = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}(\text{cm})$$

2. 다음 그림과 같이 O 를 꼭짓점, $\overline{OA}$ 를 모선으로 하는 원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 잘라서 만든 원뿔대의 윗면과 모선 OA 와의 교점을 B 라 하고 실을 점 A 에서 $\overline{AB}$ 의 중점 M 까지 가장 짧게 한 바퀴 감았을 때, 윗면의 원둘레 위의 점과 실 위의 점 사이의 거리 중 가장 짧은 거리를 구하여라. (단, $\overline{AB} = 20\,\text{cm}$, 원뿔대의 윗면의 반지름은 $5\,\text{cm}$, 아랫면의 반지름은 $10\,\text{cm}$ 이다.)



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 4 cm

해설

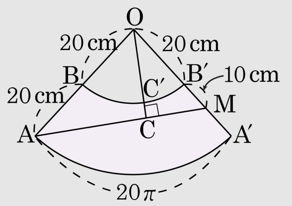
$5.0pt\overset{\frown}{BB'} : 5.0pt\overset{\frown}{AA'} = 1 : 2$ 이므로

$\overline{OB} = 20\,(\text{cm})$

$2\pi \times 20 \times \dfrac{\angle BOB'}{360\,°} = 2\pi \times 5$

$\therefore\ \angle BOB' = 90\,°$

점 O 에서 $\overline{AM}$ 에 내린 수선의 발을 C 라 하고



$5.0pt\overset{\frown}{BB'}$ 와 $\overline{OC}$ 의 교점을 C′ 라 하면 $\overline{CC'}$ 가 구하는 거리가 된다.

$\angle AOA' = 90\,°$ 이므로

$\overline{AM} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\ (\text{cm})$

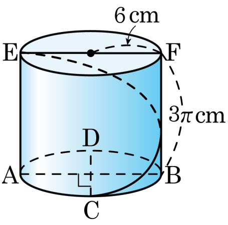
$\triangle OAM$ 의 넓이를 구해 보면

$\dfrac{1}{2} \times 40 \times 30 = \dfrac{1}{2} \times 50 \times \overline{OC}$

$\overline{OC} = 24\,(\text{cm})$, $\overline{OC'} = 20\,(\text{cm})$ 이므로

$\overline{CC'} = 24 - 20 = 4\ (\text{cm})$

3. 다음 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 6 cm, 높이가 3π cm 인 원기둥에서 밑면의 지름 AB 와 수직인 지름 CD 에 대하여 점 C 에서 점 E 까지 원기둥의 옆면을 따라 오른쪽으로 올라갈 때의 최단 거리를 구하여라. (단, $\overline{AB} \mathbin{/\mkern-6mu/} \overline{EF}$)

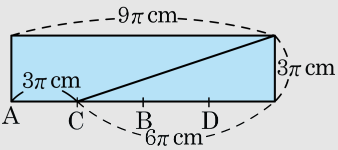


▶ **답 :** ____ cm

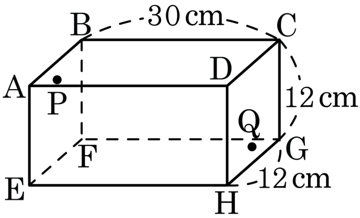
▷ **정답 :** $3\sqrt{10}\pi$ cm

해설

$\sqrt{(3\pi)^2 + (9\pi)^2}$ $=$ $3\sqrt{10}\pi$ (cm)



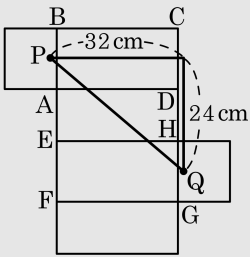
4. 다음 그림과 같이 가로, 세로, 높이가 각각 30cm, 12cm, 12cm 인 직육면체가 있다. 점 P 는 $\overline{AB}$ 의 중점에서 아래로 1cm 인 지점이고, 점 Q 는 $\overline{GH}$ 의 중점에서 위로 1cm 인 지점에 있다. 이 직육면체의 면을 따라 P 에서 Q 로 가는 가장 짧은 길의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

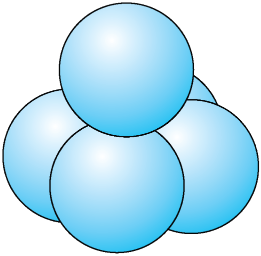
▷ 정답 : 40 cm

해설



$$\overline{PQ}^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600$$
$$\overline{PQ} = \sqrt{1600} = 40(\text{cm})$$

5. 다음 그림과 같이 부피가 36π 인 구 5 개가 서로 외접하고 있을 때, 이 모양의 꼭대기부터 밑바닥까지의 높이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $6 + 3\sqrt{2}$

해설

구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 부피는

$\frac{4}{3}\pi \times r^3 = 36\pi,\ r = 3$

다섯 개의 구의 중심을 각각 O, P, Q, R, S 라 하면 밑면이 한 변의 길이가 6 인 정사각형 PQRS 인 정사각뿔을 그릴 수 있다. 이때 변 PQ 의 중점을 M, 정사각형 PQRS 의 두 대각선의 교점을 T 라 하면 $\overline{OM}$ 은 한 변의 길이가 6 인 정삼각형 OPQ 의 높이이므로 $\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ 이다.

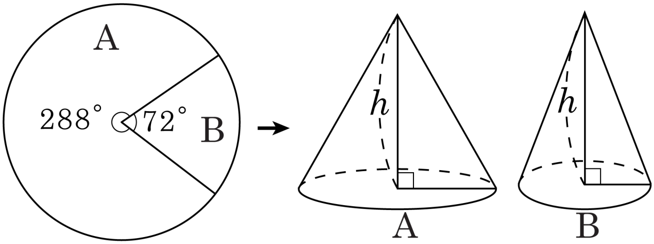
$\triangle$OMT 에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{OT} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$

따라서 구하는 높이는 (구 O의 반지름의 길이) + $\overline{OT}$ + (구 Q의 반지름의 길이) 이므로

$3 + 3\sqrt{2} + 3 = 6 + 3\sqrt{2}$ 이다.

6. 반지름의 길이가 10 인 원을 다음 그림과 같이 중심각이 $288°$, $72°$ 가 되도록 잘라내어 2 개의 고깔을 만들었다. 두 고깔 A, B 의 부피를 각각 x, y 라 할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값은?



① $\frac{\sqrt{6}}{24}$　　② $\frac{\sqrt{6}}{12}$　　③ $2\sqrt{6}$　　④ $4\sqrt{6}$　　⑤ $6\sqrt{6}$

해설

i) 호의 길이와 밑면의 둘레

$$A : 20\pi \times \frac{288°}{360°} = 16\pi$$

$\therefore r_A = 8$

$$B : 20\pi \times \frac{72°}{360°} = 4\pi$$

$\therefore r_B = 2$

ii) 원뿔의 높이

A : 모선의 길이는 10 , 밑면의 반지름의 길이는 8

$h_A = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$

B : 선의 길이는 10 , 밑면의 반지름의 길이는 2

$h_B = \sqrt{100-4} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

iii) 원뿔의 부피

A : 밑면의 반지름의 길이는 8 , 높이는 6

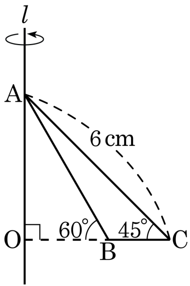
$$V_A = \frac{1}{3} \times 8 \times 8 \times \pi \times 6 = x$$

B : 밑면의 반지름의 길이는 2 , 높이는 $4\sqrt{6}$

$$V_B = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \pi \times 4\sqrt{6} = y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{3} \times 8 \times 8 \times \pi \times 6}{\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \pi \times 4\sqrt{6}} = \frac{24}{\sqrt{6}} = \frac{24\sqrt{6}}{6} = 4\sqrt{6}$$

7. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$ 를 직선 l 을 회전축으로 하여 1 회전시켰을 때 생기는 입체도형의 부피를 구하면?



① $4\sqrt{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$ ② $6\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^3$

③ $12\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^3$ ④ $12\sqrt{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$

⑤ $24\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^3$

해설

$\triangle AOC$ 에서 $\overline{AO} : \overline{CO} : \overline{AC} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AO} : \overline{AC} = 1 : \sqrt{2}$, $\overline{AO} : 6 = 1 : \sqrt{2}$, $\therefore\ \overline{AO} = \overline{CO} = 3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

$\triangle AOB$ 에서 $\overline{AO} : \overline{BO} = \sqrt{3} : 1$

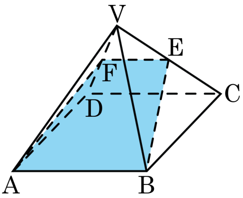
$\therefore\ \overline{BO} = \sqrt{6}\ (\mathrm{cm})$

따라서 부피는 $\left(\frac{1}{3} \times \pi \times (3\sqrt{2})^2 \times 3\sqrt{2}\right)$

$-\left(\frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{6})^2 \times 3\sqrt{2}\right)$

$= 18\sqrt{2}\pi - 6\sqrt{2}\pi = 12\sqrt{2}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$ 이다.

8. 다음 그림과 같이 모서리의 길이가 모두 $8\,\mathrm{cm}$ 인 정사각뿔에서 $\overline{\mathrm{VC}}$, $\overline{\mathrm{VD}}$ 의 중점을 각각 E, F 라고 할 때, □ABEF 의 넓이를 구하면?



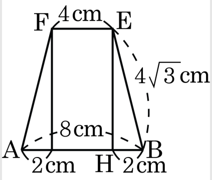
① $11\sqrt{10}\,\mathrm{cm}^2$　② $12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

③ $12\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^2$　④ $12\sqrt{11}\,\mathrm{cm}^2$

⑤ $24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{BE}}$, $\overline{\mathrm{EF}} // \overline{\mathrm{AB}}$ 이므로 □ABEF 는 등변사다리꼴이다.



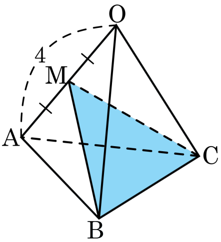
$\overline{\mathrm{AB}} = 8\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{EF}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = 4\,\mathrm{cm}$ ($\because$ 중점 연결 정리)

$\overline{\mathrm{BE}}$, $\overline{\mathrm{AF}}$ 는 한 변의 길이가 $8\,\mathrm{cm}$ 인 정삼각형의 높이이므로 $\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{AF}} = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$

사다리꼴의 높이 $\overline{\mathrm{EH}} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}(\mathrm{cm})$ 이다.

$\therefore$ □ABEF $= (8+4) \times 2\sqrt{11} \times \frac{1}{2} = 12\sqrt{11}(\mathrm{cm}^2)$

9. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4 인 정사면체에서 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\triangle\mathrm{MBC}$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $4\sqrt{2}$

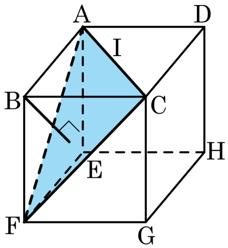
해설

$\triangle\mathrm{MBC}$ 는 $\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{CM}} = 2\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형

(높이) $= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ ($\triangle\mathrm{MBC}$의 넓이) $= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

10. 한 모서리의 길이가 $4\,\mathrm{cm}$ 인 정육면체 ABCD−EFGH 에 대하여 점 B 에서 $\triangle$AFC 에 내린 수선의 길이를 h 라 할 때, h는 $a\sqrt{b}\,\mathrm{cm}$ 이다. $a\times b$ 의 값을 구하여라.(단, b는 최소의 자연수)



▶ 답 :

▷ 정답 : $a\times b=4$

해설

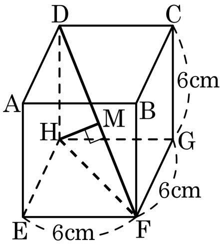
삼각뿔 F−ABC 의 부피는 $\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\overline{\mathrm{BF}}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times4\right)\times4=\frac{32}{3}(\mathrm{cm}^3)$

$\triangle$AFC 는 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}\mathrm{cm}$ 인 정삼각형이므로 $\triangle\mathrm{AFC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2=8\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

$\frac{32}{3}=\frac{1}{3}\times8\sqrt{3}\times h$ $\therefore$ $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}$ 이다.

따라서 $a\times b=\frac{4}{3}\times3=4$ 이다.

11. 다음 그림은 한 모서리의 길이가 6cm 인 정육면체이다. 점 H 에서 대각선 DF 에 내린 수선의 발 M 까지의 거리를 구하여라.



① $2\sqrt{6}$ cm　② $6\sqrt{3}$ cm　③ $2\sqrt{5}$ cm
④ $6\sqrt{6}$ cm　⑤ $3\sqrt{6}$ cm

해설

$\overline{HF} = 6\sqrt{2},\ \overline{DF} = \sqrt{6^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 6\sqrt{3}$

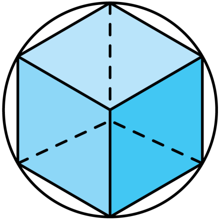
$\triangle DHF = \overline{DH} \times \overline{HF} \times \frac{1}{2} = \overline{DF} \times \overline{HM} \times \frac{1}{2}$ 이므로

$6 \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 6\sqrt{3} \times \overline{HM} \times \frac{1}{2}$

$18\sqrt{2} = 3\sqrt{3} \times \overline{HM}$

$\therefore \overline{HM} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$

12. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8 cm 인 정육면체에 외접하는 구의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ **답 :** ______ cm

▷ **정답 :** $4\sqrt{3}$ cm

해설

정육면체에 외접하는 구의 중심은 정육면체의 두 대각선의 교점이므로 구의 반지름은 대각선의 길이의 반이다.

$$\begin{aligned}(\text{반지름}) &= \frac{1}{2} \times (\text{대각선의 길이}) \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{8^2 + 8^2 + 8^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

13. 직육면체의 세 모서리의 길이의 비가 $1 : \sqrt{2} : 2$ 이고 대각선의 길이가 $3\sqrt{7}$ 일 때, 이 직육면체의 부피를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $54\sqrt{2}$

해설

직육면체의 세 모서리의 길이의 비가 $1 : \sqrt{2} : 2$ 이므로 세 변의 길이를 각각 k, $\sqrt{2}k$, $2k$ (k는 양의 실수) 로 나타낼 수 있다.
대각선의 길이가 $3\sqrt{7}$ 이므로

$$\sqrt{k^2 + (\sqrt{2}k)^2 + (2k)^2} = 3\sqrt{7}$$

$7k^2 = 63$, $k^2 = 9$, $k > 0$ 이므로 $k = 3$
따라서 세 변의 길이는 $3, 3\sqrt{2}, 6$ 이다.
따라서 이 직육면체의 부피는 $3 \times 3\sqrt{2} \times 6 = 54\sqrt{2}$ 이다.