

1. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x|x\text{는 } 40 \text{ 이하의 짝수}\}) = 40$

⑤ $n(\{x|x\text{는 } 2 < x < 4 \text{인 홀수}\}) = 1$

해설

① $n(\varnothing) = 0, n(\{0\}) = 1$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 3 - 2 = 1$

③ $n(\{4\}) = 1$

④ $n(\{2, 4, 6, \dots, 40\}) = 20$

⑤ $n(\{3\}) = 1$

2. 두 집합 A, B 가 아래의 표를 만족하도록 ㉠에 적절한 그림을 고르면?

A	B	$A \cup B$

- ①
- ②
- ㉠ ③
- ④
- ⑤

해설

$A \cup B = A \cup B$

3. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{3\}, B - A = \{5\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 일 때, $A \cap B$ 는?

- ① $\{1\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{1, 3\}$
④ $\{1, 3, 5\}$ ⑤ $\{1, 5\}$

해설

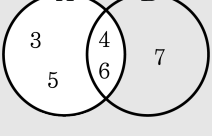
$A - B = \{3\}, B - A = \{5\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$ 이다.

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \{3, 5, 7\}$ 일 때, 집합 B 를 구하면?
- ① $\{4, 6\}$ ② $\{4, 5, 6\}$ ③ $\{4, 6, 7\}$
④ $\{5, 6, 7\}$ ⑤ $\{4, 5, 6, 7\}$

해설

$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ 이므로
 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$

$= (A \cup B) - (A \cap B) = \{3, 5, 7\}$
그런데 $A = \{3, 4, 5, 6\}$ 이므로
벤다이어그램에서 $B = \{4, 6, 7\}$



5. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x\text{는 } 8\text{의 약수}\}, B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?
- ① $n(A - B) = 2$

② $n(A \cap B) = 1$

③ $n(B \cap A^c) = 2$

④ $n(B^c) = 2$

⑤ $n((A \cup B)^c) = 1$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{2, 4, 6\}$ 이므로
① $n(A - B) = 2$
② $n(A \cap B) = 2$
③ $n(B \cap A^c) = 1$
④ $n(B^c) = 7$
⑤ $n((A \cup B)^c) = 5$

6. 40 명의 학생 중에서 수학을 선택한 학생이 20 명, 국어를 선택한 학생이 17명이었다. 수학과 국어를 모두 선택한 학생이 5명 이상일 때, 수학과 국어 중 적어도 하나를 선택한 학생은 최대 a 명이고, 최소 b 명이다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① 20 ② 32 ③ 37 ④ 47 ⑤ 52

해설

먼저, 모두 선택한 학생이 5명일 때가 최댓값이 나타나므로 이대로 계산해보면 $20 + 17 - 5 = 32$ 이다. 즉, $a = 32$

모두 선택한 학생의 최댓값은 17인데, 이를 통해 계산해 보면 20명이 나온다.

즉, $32 + 20 = 52$ 이다.

7. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n 이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n 이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1) + f(p_2) + f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$
 $p_2 : 16$ 의 양의 약수는 모두 짝수이다.
 $p_3 : \sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 & (p_n \text{이 명제이다.}) \\ -1 & (p_n \text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다. ($\because x$ 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

$p_2 : \text{거짓}, p_3 : \text{거짓} \rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$$\therefore f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) = (-1) + 1 + 1 = 1$$

8. 다음 명제 중 참인 것은?

- ① p 가 소수이면 $\sqrt{p}$ 는 무리수이다.
- ② $x < y$ 이면 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 이다. (단, $x \neq 0, y \neq 0$)
- ③ $\triangle ABC$ 가 직각삼각형이면 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이다.
- ④ $a + b$ 가 짝수이면 a, b 는 짝수이다.
- ⑤ 12와 18의 공약수는 9의 약수이다.

해설

- ① 소수 $p = k^2$ 이 될 수 없으므로 $\sqrt{p}$ 는 무리수
- ② 반례 : $x = -1, y = 1$, 즉 두 수의 부호가 다르면 성립하지 않는다.
- ③ 직각삼각형의 빗변이 $\overline{AC}$ 이 아닌 다른 변이 될 수도 있다.
- ④ 반례 : $a = 1, b = 3$
- ⑤ 12와 18의 공약수는 6의 약수이다.

9. 다음 명제의 이가 참이 아닌 것은?

- ① 실수 a, b, c 에 대하여 $ac = bc$ 이면 $a = b$ 이다.
- ② 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.
- ③ 실수 x, y 에 대하여 $x > 1, y > 1$ 이면 $xy > 1, x + y > 2$ 이다.
- ④ 대각선이 직교하면 마름모이다.
- ⑤ 두 각이 같으면, $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

해설

‘이’의 대우가 ‘역’이므로, ‘역’이 참인지 확인 한다.

- ① 실수 a, b, c 에 대하여 $a = b$ 이면 $ac = bc$ 이다. $\Rightarrow$ (참)
- ② 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$ 이다. $\Rightarrow$ (참)
- ③ $xy > 1, x + y > 2$ 이면, $x > 1, y > 1$ 이다.
 (반례 : $x = 5y = \frac{1}{2}$)
- ④ 마름모이면 대각선이 직교한다. $\Rightarrow$ (참)
- ⑤ $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이면, 두 각이 같다. $\Rightarrow$ (참)

10. 다음은 ‘ a, b, c 가 자연수일 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’임을 증명한 것이다.

a, b 가 모두 (가)가 아니라고 가정하면, $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2 + b^2 = 3M + (\text{나})$ (단, M 은 자연수) $\cdots \text{㉠}$
또, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)라 하면, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M'' + (\text{다})$ (단, M', M'' 은 자연수)가 되어 ㉠의 $3M + (\text{나})$ 의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

- ① 자연수, 1, 2
- ② 자연수, 2, 1
- ③ 3의 배수, 1, 2
- ④ 3의 배수, 2, 1
- ⑤ 3의 배수, 2, 2

해설

a, b 가 모두 3의 배수가 아니라고 가정하면
 $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2 + b^2 = (3m \pm 1)^2 + (3n \pm 1)^2 = 3(3(m^2 + n^2) \pm 2(m + n)) + 2 = 3M + 2$ (단, M 은 자연수) $\cdots \cdots \text{㉠}$
한편, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)로 놓을 수 있으므로
 $c^2 = 9l^2$ 또는 $c^2 = (3l \pm 1)^2 = 3(3l^2 \pm 2l) + 1$
즉, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M + 1$ (단, M', M 은 자연수)의 꼴이 되어 ㉠의 $3M + 2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

11. 다음 보기중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건이 되는 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $p : xy > 0, q : |x| + |y| = |x + y|$
- ㉡ $p : xy < 0, q : |x| + |y| > |x + y|$
- ㉢ $p : xy \leq 0, q : ||x| - |y|| = |x + y|$
- ㉤ $p : x^2 > y^2, q : x^3 > y^3$
- ㉥ $p : \text{임의의 실수 } a \text{ 에 대하여 } ax + y = 0,$
 $q : |x| + |y| = 0$

- ① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉢, ㉤

③ ㉡, ㉢, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉥

⑤ ㉡, ㉢, ㉤, ㉥

해설

- ㉠ (반례) $x = 1, y = 0$
- ㉡은 x 또는 y 가 0 보다 작을 때 $q : |x| + |y| > |x + y|$ 의 식에서 x, y 값이 하나가 음수이므로 우변의 절댓값이 적어지기 때문에 성립하고 역 역시 성립한다.
- ㉢에서는 위의 조건 p 에서 0 과 같은 경우가 추가되는데, 이는 한 가지 수가 음수이므로 그 수들의 차와 절댓값을 붙인 수가 양변에 같게 된다. 따라서 성립한다.
- ㉤ (반례) $x = -3, y = 1$
- ㉥ 조건 p, q 모두 $x = 0$ 이고 $y = 0$

12. 세 조건 a, b, c 를 만족하는 값들의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $A = \{2p\}, B = \{p^2 + 1, 4\}, C = \{4, 2p + 1\}$ 이다. a 가 b 이기위한 충분조건이고, b 는 c 이기위한 필요충분조건일 때, p 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$a \Rightarrow b$ 이므로
 $2p = p^2 + 1$ 또는 $2p = 4$
 $b \Leftarrow c$ 이므로 $2p + 1 = p^2 + 1$
 $\therefore p^2 - 2p = 0$
따라서 $p = 0$ 또는 $p = 2$
 $p = 0$ 이면 $2 \times 0 \neq 0 + 1$ 이고 $2 \times 0 \neq 4$ 이므로
 $p = 2$

13. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{9}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

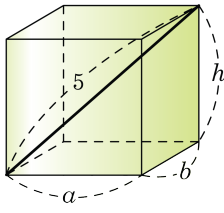
해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계를 적용하면

$$xy + 1 + 9 + \frac{9}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{xy \cdot \frac{9}{xy}} + 10$$

$$= 2 \cdot 3 + 10 = 16$$

14. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
 ④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2 + b^2 + h^2 = 25$
 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.
 $(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$
 $25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$
 $\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$
 $\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a + b + h)$ 의 최댓값
 $: 20\sqrt{3}$

15. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ 의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A 라 할 때 $n(A)$ 를 구하면?

- ㉠ $2 \in A$
- ㉡ $m, n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$
 $2 \in A$, $2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$
이와 같은 과정을 반복하면
 $2^4 \in A$, $2^5 \in A$, $2^6 \in A, \dots$
따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ 이다.

16. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 않은 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다.
원소는 10 미만의 자연수이다.

- ① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 {2, 3, 5, 7} 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5\}$
② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

17. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳은 것은?

보기

$$A \subset C, B \subset C, C \subset E, D \subset E$$

- ① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다.
- ② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다.
- ③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다.
- ④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다.
- ⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다.

해설

- ① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다. $\rightarrow$ 알 수 없다.
- ② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다. $\rightarrow$ 알 수 없다.
- ③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다. $\rightarrow D \subset B, B \not\subset D$ 일 수 있다.
- ④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다. $\rightarrow E \subset D$ 이면, $D = E$ 이고 $A \subset E$ 이므로 $A \subset D$ 이다.
- ⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다. $\rightarrow B = C = E$ 일 수 있다.

18. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 집합 B 의 부분집합의 개수보다 8 개 더 많을 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구한 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 7 ⑤ 9

해설

부분집합의 개수는 (2 의 거듭제곱) 개이므로
2, 4, 8, 16, 32, 64, ... 이다.
이 중에서 차가 8 인 두 수는 16 과 8 이다.
 $\therefore 2^{n(A)} = 16 = 2^4, 2^{n(B)} = 8 = 2^3$
($\because n(A) > n(B)$)
 $\therefore n(A) = 4, n(B) = 3$
 $4 - 3 = 1$

19. 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

$\neg n(\{0\}) = 0$

$\mathbb{L} \phi \subset \{\emptyset\}$

$\mathbb{E} 4 \subset \{1, 2\}$

$\mathbb{E} 0 \subset \{0\}$

$\mathbb{E} 0 \in \emptyset$

$\mathbb{H} 0 \notin \emptyset$

- ①

$\mathbb{L}, \mathbb{H}$
- ②

$\mathbb{L}, \mathbb{E}$
- ③

$\neg, \mathbb{L}$
- ④

$\mathbb{E}, \mathbb{E}$
- ⑤

$\mathbb{E}, \mathbb{E}$

해설

$\neg n(\{0\}) = 1$

$\mathbb{E} 4 \notin \{1, 2\}$

$\mathbb{E} 0 \in \{0\}$

$\mathbb{E} 0 \notin \emptyset$

20. 축구공을 가지고 있는 학생은 15 명, 농구공을 가지고 있는 학생은 10 명, 둘 다 가지고 있는 학생이 3 명일 때, 축구공 또는 농구공을 가지고 있는 학생은 몇 명인가?

① 21 명 ② 22 명 ③ 23 명 ④ 24 명 ⑤ 25 명

해설

축구공을 갖고 있는 학생과 농구공을 갖고 있는 학생의 집합을 각각 A , B 라 하면, 둘 다 가지고 있는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.
 $n(A) = 15$, $n(B) = 10$, $n(A \cap B) = 3$
 $n(A \cup B) = 15 + 10 - 3 = 22$

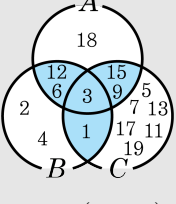
21. 세 집합 $A = \{x|x\text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$,
 $B = \{x|x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$,
 $C = \{x|x\text{는 } 20 \text{ 이하의 홀수}\}$
에 대하여 $C - (A \cap B)$ 로 알맞은 것은?

- ① { 5, 7, 11, 13, 17, 19}
- ② {1, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
- ③ {1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
- ④ {1, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19}
- ⑤ {1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

해설

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
 $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

이므로
 $A \cap B = \{3, 6, 12\}$



$\therefore C - (A \cap B) = \{1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

22. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{1, 3, 4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 일 때, 집합 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$B = \{1, 3, 4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 이므로 남은 원소는 2, 5 이므로 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 $2 \times 2 = 4(\text{개})$ 이다.

23. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \emptyset$ 일 때, $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이라면 집합 B 로 알맞지 않은 것은?

① $B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$

② $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

③ $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

④ $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$

⑤ $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A - B = \emptyset$ 이면 집합 A 의 모든 원소는 집합 B 에 속한다.

24. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

- ㉠ $A_5 \cap A_7 = \emptyset$
- ㉡ $A_4 \cup A_6 = A_4$
- ㉢ m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$
- ㉤ $m = kn$ (k 는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

- ① ㉠, ㉡, ㉤
- ② ㉠, ㉢
- ③ ㉠, ㉢, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉤
- ⑤ ㉢, ㉤

해설

- ㉠ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$
- ㉡ $A_4 = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$
 $A_6 = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ 이므로
 $A_4 \cup A_6 = \{4, 6, 8, 12, 16, \dots\} \neq A_4$
- ㉢ $A_m = \{m, 2m, \dots, nm, (n+1)m, \dots\}$
 $A_n = \{n, 2n, \dots, mn, (m+1)n, \dots\}$
 m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$
- ㉤ $A_m = A_{kn} = \{kn, 2kn, 3kn, \dots\}$
 $A_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \dots\}$ 이므로
 $A_m \subset A_n$

25. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면 $P \cup Q = P, P \cap R = \emptyset$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① $p \rightarrow \sim r$
- ② $\sim p \rightarrow \sim q$
- ③ $q \rightarrow r$
- ④ $q \rightarrow \sim r$
- ⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$
 $P \cap R = \emptyset \Rightarrow p \rightarrow \sim r \Leftrightarrow r \rightarrow \sim p \quad q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r$ 이므로 $q \rightarrow \sim r$

26. 두 조건 $p_n, q_n (n = 1, 2)$ 에 대하여 $P_n = \{x|x \text{는 } p_n \text{을 만족한다.}\}$, $Q_n = \{x|x \text{는 } q_n \text{을 만족한다.}\}$ 이고, p_1 은 p_2 이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $P_1 \cap P_2 = P_2$
- ② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$
- ③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1$
- ④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_2$
- ⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1$

해설

p_1 은 p_2 이기 위한 필요조건이므로 $P_1 \supset P_2$, q_n 은 p_n 이기 위한 충분조건이므로 $P_1 \supset Q_1, P_2 \supset Q_2$

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1 \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_1 \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1 \cup Q_2 \neq Q_1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

27. $A = \{1, 2, 4\}$ 에 대하여
 $B = \{x \mid x = a \times b, a \in A, b \in A\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $5 \notin B$

② $8 \in B$

③ $\{16\} \notin B$

④ $A = B$

⑤ $A \subset B$

해설

$A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이므로

$A \subset B$

28. 13^n (n 은 자연수)의 일의 자리 수의 모임을 집합 A 라 할 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 a , 집합 A 의 원소의 합을 b 라 하면 $a + b$ 의 값은?

① 30 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

해설

13의 거듭제곱의 일의 자리 수는
3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ...로 반복된다.
그러므로 집합 $A = \{3, 9, 7, 1\}$ 이다.
 $\therefore a = 2^4 = 16, b = 3 + 9 + 7 + 1 = 20$
 $\therefore a + b = 36$

29. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 홀수가 하나만 속하는 것을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 이라 하고, $A_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 의 원소의 합을 S_k 라고 할 때, $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ 의 값은?

- ① 216 ② 240 ③ 672 ④ 696 ⑤ 728

해설

집합 S 에 홀수 1, 3, 5가 있으므로 홀수를 하나만 포함하는 부분집합의 개수를 구할 때, 1을 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{\text{A}}$$

3을 포함하고 1, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{\text{B}}$$

5를 포함하고 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3} = 8 \text{ (개)} \dots \textcircled{\text{C}}$$

이므로 모두 24개이다. 이 24개의 부분집합의 열을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ 라 하면 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{24}$ 에는 S 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 몇 개씩 들어갈까? 우선 1을 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개이므로 1이 8번 들어가는 것은 분명하다. 그러면 3, 5는 들어가지 않으니 문제 삼지 말고 2, 4, 6은 몇 번 들어갈까?

구체적으로 나열하면 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}$ 이 되어 2, 4, 6은 각각 4번씩 들어간다. 따라서 $\textcircled{\text{A}}$ 의 8개의 집합 안에는 1이 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 $\textcircled{\text{B}}$ 의 8개의 집합 안에는 3이 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 $\textcircled{\text{C}}$ 의 8개의 집합 안에는 5가 8번, 2, 4, 6이 각각 4번씩 들어가므로 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{24} = 8(1 + 3 + 5) + 12(2 + 4 + 6) = 216$ 그런데, 여기서 원소의 총합에 대한 규칙성을 발견해 보면 2, 4, 6이 각각 4번씩 나오는데 그 이유를 알아보자. 1을 반드시 포함하고 3, 5를 포함하지 않는 부분집합 중에서 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 1, 2, 3, 5를 제외한 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-4} = 4$ (개)이다.

30. 두 집합 P, Q 에 대하여 집합의 연산 Δ 을 $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 로 약속할 때, $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$ 에 대하여 다음과 같다면 a 의 값은?

$(A\Delta B)\Delta C = \{1, 4, 9\}$

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$
 $A\Delta B = \{1\}$, $\{1\}\Delta C = \{1, 4, 9\}$ 를 만족하려면 집합 C 에는 1은 없어야 하고 9는 있어야한다.
 $\therefore a = 9$

31. $a > 0, b > 0, c > 0, a^2 = b^2 + c^2, b + c \leq ka$ 를 만족하는 양의 상수 k 의 최솟값은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b + c \leq ka$ 에서 $b + c > 0$ 이므로
 $(b + c)^2 \leq k^2 a^2, (b + c)^2 \leq k^2(b^2 + c^2)$
그러므로 $(k^2 - 1)b^2 - 2bc + (k^2 - 1)c^2 \geq 0$
이 임의의 양수 b, c 에 대하여 성립할 조건은
 $k^2 - 1 > 0, D/4 = c^2 - (k^2 - 1)^2 c^2 \leq 0$
두 식에서 $k > 0$ 이므로 $k \geq \sqrt{2}$
따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

32. $x < 0$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 만족할 때,
 $f(x)$ 의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 ④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
 ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

$$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 하면

$$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 2}{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$$

$x < 0$ 이므로

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore f(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

33. a, b 가 양의 상수이고, x, y 가 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 만족하면서 변할 때, $x+y$ 의 최댓값은?

- ① a^2
- ② b^2
- ③ $\sqrt{a^2 + b^2}$
- ④ $a^2 + b^2$
- ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식
 $(a^2 + b^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \geq (x + y)^2$ 은 항상 성립하므로
 $a^2 + b^2 \geq (x + y)^2 \dots\dots ①$
 $\therefore x + y \leq \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots ②$
①의 등호가 성립할 조건은
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이고 $\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \dots\dots ③$
또, ③의 등호는 $x + y \geq 0$ 일 때, 성립하므로
③을 풀면
 $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 이고,
 $x + y$ 의 최댓값은 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.