1. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

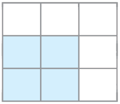
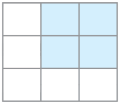
④ $n(\{x|x\text{는 } 40 \text{ 이하의 짝수}\}) = 40$

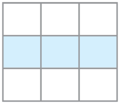
⑤ $n(\{x|x\text{는 } 2 < x < 4\text{인 홀수}\}) = 1$

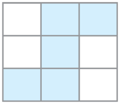
해설

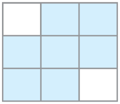
①$n(\varnothing) = 0,\ n(\{0\}) = 1$
②$n(\{1,\ 2,\ 4\}) - n(\{1,\ 4\}) = 3 - 2 = 1$
③$n(\{4\}) = 1$
④$n(\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 40\}) = 20$
⑤$n(\{3\}) = 1$

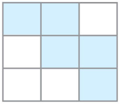
2. 두 집합 A, B 가 아래의 표를 만족하도록 ㉠에 적절한 그림을 고르면?

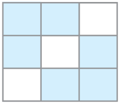
A	B	$A \cup B$
		㉠

① 

② 

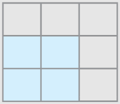
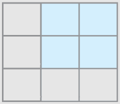
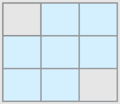
③ 

④ 

⑤ 

해설

$A \cup B = A \cup B$

3. 전체집합 $U = \{1,3,5,7,9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{3\}$, $B - A = \{5\}$, $A^c \cap B^c = \{7,9\}$ 일 때, $A \cap B$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{1,3\}$

④ $\{1,3,5\}$ ⑤ $\{1,5\}$

해설

$A - B = \{3\}$, $B - A = \{5\}$, $A^c \cap B^c = \{7,9\}$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$ 이다.

4. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=\{3,5,7\}$ 일 때, 집합 B를 구하면?

① $\{4,\ 6\}$　② $\{4,\ 5,\ 6\}$　③ $\{4,\ 6,\ 7\}$

④ $\{5,\ 6,\ 7\}$　⑤ $\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

해설

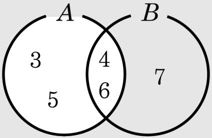
$A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$ 이므로

$(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

$=(A\cup B)-(A\cap B)=\{3,\ 5,\ 7\}$

그런데 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이므로

벤다이어그램에서 $B=\{4,\ 6,\ 7\}$



5. 전체집합 $U = \{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x$는 8의 약수$\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $n(A - B) = 2$

② $n(A \cap B) = 1$

③ $n(B \cap A^c) = 2$

④ $n(B^c) = 2$

⑤ $n((A \cup B)^c) = 1$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 이므로

① $n(A - B) = 2$

② $n(A \cap B) = 2$

③ $n(B \cap A^c) = 1$

④ $n(B^c) = 7$

⑤ $n((A \cup B)^c) = 5$

6. 40명의 학생 중에서 수학을 선택한 학생이 20명, 국어를 선택한 학생이 17명이었다. 수학과 국어를 모두 선택한 학생이 5명 이상일 때, 수학과 국어 중 적어도 하나를 선택한 학생은 최대 a 명이고, 최소 b 명이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① 20 ② 32 ③ 37 ④ 47 ⑤ 52

해설

먼저, 모두 선택한 학생이 5명일 때가 최댓값이 나타나므로 이대로 계산해보면 $20+17-5=32$이다. 즉, $a=32$
모두 선택한 학생의 최댓값은 17인데, 이를 통해 계산해 보면 20명이 나온다.
즉, $32+20=52$ 이다.

7. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \to$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\to$ 모두 거짓인 명제이다.

$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

8. 다음 명제 중 참인 것은?

① p 가 소수이면 $\sqrt{p}$는 무리수이다.

② $x < y$이면 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$이다. (단, $x \neq 0, y \neq 0$)

③ $\triangle ABC$가 직각삼각형이면 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이다.

④ $a + b$가 짝수이면 a, b는 짝수이다.

⑤ 12와 18의 공약수는 9의 약수이다.

해설

① 소수 $p = k^2$ 이 될 수 없으므로 $\sqrt{p}$ 는 무리수
② 반례 : $x = -1, y = 1$, 즉 두 수의 부호가 다르면 성립하지 않는다.
③ 직각삼각형의 빗변이 $\overline{AC}$ 이 아닌 다른 변이 될 수도 있다.
④ 반례 : $a = 1, b = 3$
⑤ 12와 18의 공약수는 6의 약수이다.

9. 다음 명제의 이가 참이 아닌 것은?

① 실수 a, b, c 에 대하여 $ac = bc$ 이면 $a = b$ 이다.

② 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.

③ 실수 x, y 에 대하여 $x > 1,\ y > 1$ 이면 $xy > 1,\ x + y > 2$ 이다.

④ 대각선이 직교하면 마름모이다.

⑤ 두 각이 같으면, $\triangle$ABC 는 이등변삼각형이다.

해설

'이'의 대우가 '역'이므로, '역'이 참인지 확인 한다.

① 실수 a, b, c 에 대하여 $a = b$ 이면 $ac = bc$ 이다. ⇒ (참)

② 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$ 이다. ⇒ (참)

③ $xy > 1, x + y > 2$ 이면, $x > 1, y > 1$ 이다.

$\left(\text{반례} : x = 5y = \frac{1}{2}\right)$

④ 마름모이면 대각선이 직교한다. ⇒ (참)

⑤ $\triangle$ABC가 이등변삼각형이면, 두 각이 같다. ⇒ (참)

10. 다음은 'a, b, c 가 자연수일 때, $a^2+b^2=c^2$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 임을 증명한 것이다.

> a, b 가 모두 (가)가 아니라고 가정하면, $a=3m\pm1, b=3n\pm1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2+b^2=3M+$(나) (단, M 은 자연수) $\cdots$ ㉠
> 또, $c=3l$, $3l\pm1$ (단, l 은 자연수)라 하면, $c^2=3M'$ 또는 $c^2=3M''+$(다) (단, M', M'' 은 자연수)가 되어 ㉠의 $3M+$(나)의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 자연수, 1, 2

② 자연수, 2, 1

③ 3 의 배수, 1, 2

④ 3 의 배수, 2, 1

⑤ 3 의 배수, 2, 2

해설

a, b가 모두 3 의 배수가 아니라고 가정하면
$a=3m\pm1$, $b=3n\pm1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2+b^2=(3m\pm1)^2+(3n\pm1)^2=3\{3(m^2+n^2)\pm2(m+n)\}+2$
$=3M+2$ (단, M은 자연수) $\cdots\cdots$ ㉠
한편, $c=3l$, $3l\pm1$ (단, l 은 자연수)로 놓을 수 있으므로
$c^2=9l^2$ 또는 $c^2=(3l\pm1)^2=3(3l^2\pm2l)+1$
즉, $c^2=3M'$ 또는 $c^2=3M+1$ (단, M', M 은 자연수)의 꼴이 되어 ㉠의 $3M+2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

11. 다음 보기중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건이 되는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $p : xy > 0,\ q : |x| + |y| = |x + y|$

㉡ $p : xy < 0,\ q : |x| + |y| > |x + y|$

㉢ $p : xy \leq 0,\ q : ||x| - |y|| = |x + y|$

㉣ $p : x^2 > y^2,\ q : x^3 > y^3$

㉤ p : 임의의 실수 a 에 대하여 $ax + y = 0$,
q : $|x| + |y| = 0$

① ㉠, ㉡, ㉢　② ㉠, ㉢, ㉣　③ ㉡, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉤　⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ (반례) $x = 1,\ y = 0$
㉡은 x 또는 y 가 0 보다 작을 때 $q : |x| + |y| > |x + y|$ 의 식에서 x, y 값이 하나가 음수이므로 우변의 절댓값이 적어지기 때문에 성립하고 역 역시 성립한다.
㉢에서는 위의 조건 p 에서 0 과 같은 경우가 추가되는데, 이는 한 가지 수가 음수이므로 그 수들의 차와 절댓값을 붙인 수가 양변에 같게 된다. 따라서 성립한다.
㉣ (반례) $x = -3,\ y = 1$
㉤ 조건 p, q 모두 $x = 0$ 이고 $y = 0$

12. 세 조건 a, b, c 를 만족하는 값들의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $A=\{2p\}$, $B=\{p^2+1,\ 4\}$, $C=\{4,\ 2p+1\}$ 이다. a 가 b 이기위한 충분조건이고, b 는 c 이기위한 필요충분조건일 때, p 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$a \Rightarrow b$ 이므로

$2p=p^2+1$ 또는 $2p=4$

$b \Leftarrow c$ 이므로 $2p+1=p^2+1$

$\therefore p^2-2p=0$

따라서 $p=0$ 또는 $p=2$

$p=0$ 이면 $2\times 0\neq 0+1$ 이고 $2\times 0\neq 4$ 이므로

$p=2$

13. $x>0,\ y>0$ 일 때, $\left(x+\dfrac{9}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16　② 14　③ 12　④ 10　⑤ 8

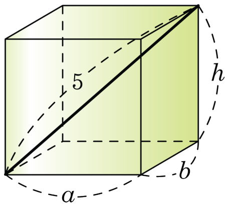
해설

$x>0,\ y>0$이므로 산술기하평균의 관계를 적용하면

$$xy+1+9+\frac{9}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{xy\cdot\frac{9}{xy}}+10$$

$$=2\cdot 3+10=16$$

14. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}$　③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$　⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

: $20\sqrt{3}$

15. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A라 할 때 $n(A)$를 구하면?

㉠ $2 \in A$
㉡ $m,\ n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$

$2 \in A,\ 2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$

이와 같은 과정을 반복하면

$2^4 \in A,\ 2^5 \in A,\ 2^6 \in A, \cdots$

따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$ 이다.

16. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 <u>않은</u> 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다. 원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다. 원소는 10 미만의 자연수이다.

① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\}$ ② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\}$

③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\}$ ④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5\}$
② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

17. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳은 것은?

보기

$A \subset C$, $B \subset C$, $C \subset E$, $D \subset E$

① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다.

② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다.

③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다.

④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다.

⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다.

해설

① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다. → $D \subset B$, $B \not\subset D$ 일 수 있다.
④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다. → $E \subset D$ 이면, $D = E$ 이고 $A \subset E$ 이므로 $A \subset D$ 이다.
⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다. → $B = C = E$ 일 수 있다.

18. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 집합 B 의 부분집합의 개수보다 8 개 더 많을 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구한 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 7　　⑤ 9

해설

부분집합의 개수는 (2 의 거듭제곱) 개이므로
$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64, \cdots$ 이다.
이 중에서 차가 8 인 두 수는 16 과 8 이다.
$\therefore\ 2^{n(A)} = 16 = 2^4,\ 2^{n(B)} = 8 = 2^3$
$(\because\ n(A) > n(B))$
$\therefore\ n(A) = 4,\ n(B) = 3$
$4 - 3 = 1$

19. 다음 [보기] 에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $n(\{0\}) = 0$ ㉡ $\phi \subset \{\varnothing\}$ ㉢ $4 \subset \{1,\ 2\}$

㉣ $0 \subset \{0\}$ ㉤ $0 \in \varnothing$ ㉥ $0 \notin \varnothing$

① ㉡,㉥ ② ㉡,㉤ ③ ㉠,㉡ ④ ㉢,㉤ ⑤ ㉤,㉦

해설

㉠ $n\{(0)\} = 1$

㉢ $4 \notin \{1, 2\}$

㉣ $0 \in \{0\}$

㉤ $0 \notin \varnothing$

20. 축구공을 가지고 있는 학생은 15 명, 농구공을 가지고 있는 학생은 10 명, 둘 다 가지고 있는 학생이 3 명일 때, 축구공 또는 농구공을 가지고 있는 학생은 몇 명인가?

① 21 명 ② 22 명 ③ 23 명 ④ 24 명 ⑤ 25 명

해설

축구공을 갖고 있는 학생과 농구공을 갖고 있는 학생의 집합을 각각 A, B 라 하면, 둘 다 가지고 있는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.

$n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(A \cap B) = 3$

$n(A \cup B) = 15 + 10 - 3 = 22$

21. 세 집합 $A=\{x|x$는 20 이하의 3의 배수$\}$,
$B=\{x|x$는 12의 약수$\}$,
$C=\{x|x$는 20 이하의 홀수$\}$

에 대하여 $C-(A\cap B)$ 로 알맞은 것은?

① $\{5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

② $\{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

③ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

④ $\{1,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

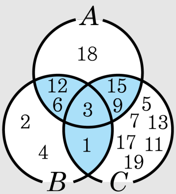
⑤ $\{1,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$

해설

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$,
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$,
$C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$

이므로

$A\cap B=\{3,\ 6,\ 12\}$



$\therefore\ C-(A\cap B)=\{1,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$

22. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{1,3,4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 일 때, 집합 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$B = \{1,3,4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 이므로 남은 원소는 2 , 5 이므로 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

23. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A-B=\varnothing$ 일 때, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ 이라면 집합 B 로 알맞지 않은 것은?

① $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8\}$

② $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$

③ $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$

④ $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\}$

⑤ $B=\{1\ ,2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,9\}$

해설

$A-B=\varnothing$ 이면 집합 A 의 모든 원소는 집합 B에 속한다.

24. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

ㄱ $A_5 \cap A_7 = \varnothing$

ㄴ $A_4 \cup A_6 = A_4$

ㄷ $m,\ n$ 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

ㄹ $m = kn(k$는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

① ㄱ, ㄴ, ㄹ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄷ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

해설

ㄱ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$

ㄴ $A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\}$

$A_6 = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$ 이므로

$A_4 \cup A_6 = \{4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\} \neq A_4$

ㄷ $A_m = \left\{m,\ 2m,\ \cdots,\ nm,\ (n+1)m,\ \cdots\right\}$

$A_n = \left\{n,\ 2n,\ \cdots,\ mn,\ (m+1)n,\ \cdots\right\}$

$m,\ n$ 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

ㄹ $A_m = A_{kn} = \{kn,\ 2kn,\ 3kn,\ \cdots\}$

$A_n = \{n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \cdots\}$이므로

$A_m \subset A_n$

25. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $P \cup Q = P,\ P \cap R = \phi$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \to \sim r$　② $\sim p \to \sim q$　③ $q \to r$

④ $q \to \sim r$　⑤ $r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

$P \cap R = \varnothing \Rightarrow p \to \sim r \Leftrightarrow r \to \sim p$ $q \to p, p \to \sim r$ 이므로 $q \to \sim r$

26. 두 조건 $p_n,\ q_n(n=1,\ 2)$에 대하여 $P_n=\{x|x$는 p_n을 만족한다.$\}$, $Q_n=\{x|x$는 q_n을 만족한다.$\}$ 이고, p_1 은 p_2이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $P_1\cap P_2=P_2$ ② $P_1\cap Q_1=Q_1$

③ $(P_1\cup Q_1)\cup P_2=P_1$ ④ $(P_1\cup Q_1)\cap P_2=P_2$

⑤ $(P_1\cap Q_1)\cup Q_2=Q_1$

해설

p_1 은 P_2이기 위한 필요조건이므로 $P_1\supset P_2$, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건이므로 $P_1\supset Q_1,\ P_2\supset Q_2$

① $P_1\cap P_2=P_2$

② $P_1\cap Q_1=Q_1$

③ $(P_1\cup Q_1)\cup P_2=P_1\cup P_2=P_1$

④ $(P_1\cup Q_1)\cap P_2=P_1\cap P_2=P_2$

⑤ $(P_1\cap Q_1)\cup Q_2=Q_1\cup Q_2\neq Q_1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

27. $A = \{1,\ 2,\ 4\}$ 에 대하여
$B = \{x \mid x = a \times b,\ a \in A,\ b \in A\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $5 \notin B$　② $8 \in B$　③ $\{16\} \notin B$
④ $A = B$　⑤ $A \subset B$

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ 이므로
$A \subset B$

28. 13^n (n 은 자연수) 의 일의 자리 수의 모임을 집합 A 라 할 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 a, 집합 A 의 원소의 합을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① 30 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

해설

13 의 거듭제곱의 일의 자리 수는

$3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 9,\ 7,\ 1,\ \cdots$ 로 반복된다.

그러므로 집합 $A=\{3,\ 9,\ 7,\ 1\}$ 이다.

$\therefore\ a=2^4=16,\ b=3+9+7+1=20$

$\therefore\ a+b=36$

29. 집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 홀수가 하나만 속하는 것을 $A_1,\ A_2,\ A_3,\cdots,A_n$이라 하고, $A_k(k=1,\ 2,\cdots,n)$의 원소의 합을 S_k라고 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$의 값은?

① 216 ② 240 ③ 672 ④ 696 ⑤ 728

해설

집합 S 에 홀수 1, 3, 5 가 있으므로 홀수를 하나만 포함하는 부분집합의 개수를 구할 때,1을 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$㉠

3을 포함하고 1, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$㉡

5를 포함하고 1, 3 을 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=8$ (개) $\cdots$㉢

이므로 모두 24 개이다. 이 24개의 부분집합의 열을 $A_1,\ A_2,\ A_3,\cdots,A_{24}$ 라 하면 $A_1,\ A_2,\ A_3,\cdots,A_{24}$ 에는 S 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 이 각각 몇 개씩 들어갈까? 우선 1 을 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8개이므로 1이 8번 들어가는 것은 분명하다. 그러면 3, 5 는 들어가지 않으니 문제 삼지 말고 2, 4, 6 은 몇 번 들어갈까?

구체적으로 나열하면$\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,4,6\}$, $\{1,2,4,6\}$이 되어 2, 4, 6 은 각각 4번씩 들어간다. 따라서 ㉠의 8개의 집합 안에는 1이 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩㉡의 8개의 집합 안에는 3이 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩㉢의 8 개의 집합 안에는 5가 8번, 2, 4, 6 이 각각 4번씩 들어가므로

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{24}=8(1+3+5)+12(2+4+6)=216$

그런데, 여기서 원소의 총합에 대한 규칙성을 발견해 보면 2, 4, 6 이 각각 4번씩 나오는데 그 이유를 알아보자.1을 반드시 포함하고 3, 5 를 포함하지 않는 부분집합 중에서 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 1, 2, 3, 5 를 제외한 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-4}=4$ (개) 이다.

30. 두 집합 P, Q 에 대하여 집합의 연산 $\triangle$ 을 $X\triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 로 약속할 때, $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$ 에 대하여 다음과 같다면 a 의 값은?

$(A\triangle B)\triangle C = \{1, 4, 9\}$

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$
$A\triangle B = \{1\}$, $\{1\}\triangle C = \{1, 4, 9\}$를 만족하려면 집합 C 에는 1은 없어야 하고 9는 있어야한다.
$\therefore a = 9$

31. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a^2=b^2+c^2,\ b+c\le ka$ 를 만족하는 양의 상수 k의 최솟값은?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ $\sqrt{6}$　　⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b+c\le ka$에서 $b+c>0$이므로

$(b+c)^2\le k^2a^2,\quad (b+c)^2\le k^2(b^2+c^2)$

그러므로 $(k^2-1)b^2-2bc+(k^2-1)c^2\ge 0$

이 임의의 양수 $b,\ c$에 대하여 성립할 조건은

$k^2-1>0,\quad D/4=c^2-(k^2-1)^2c^2\le 0$

두 식에서 $k>0$이므로 $k\ge\sqrt{2}$

따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

32. $x<0$ 인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x)=\dfrac{1}{x}+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　② $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

④ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x)=\dfrac{1}{x}+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$에서

$2f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\cdots\cdots$ ㉠

x에 $\dfrac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\dfrac{1}{x}\right)-f(x)=x\cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2+$ ㉡하면

$3f(x)=\dfrac{2}{x}+x=\dfrac{x^2+2}{x}$

$\therefore f(x)=\dfrac{x^2+2}{3x}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3x}$

$x<0$이므로

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3x}\le -2\sqrt{\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{2}{3x}}=-2\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

33. a, b가 양의 상수이고, x, y가 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 만족하면서 변할 때, $x+y$의 최댓값은?

① a^2　　② b^2　　③ $\sqrt{a^2+b^2}$

④ a^2+b^2　　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식

$(a^2+b^2)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right) \geq (x+y)^2$은 항상 성립하므로

$a^2+b^2 \geq (x+y)^2 \cdots\cdots ①$

$\therefore x+y \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdots\cdots ②$

①의 등호가 성립할 조건은

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이고 $\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{y}{b^2} \cdots\cdots ③$

또, ③의 등호는 $x+y \geq 0$일 때, 성립하므로

③을 풀면

$x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$이고,

$x+y$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$이다.