1. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.'의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등하교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

2. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 『n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』 임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n=$ (나) (단, k 는 자연수) 따라서 $n^2=4k^2=2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

① 대우, $2k$　② 대우, $4k$　③ 대우, $2k+1$

④ 역, $2k+1$　⑤ 역, $4k^2$

해설

'n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.' 의 대우는 'n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'

$\therefore$ (가)–대우 n 이 짝수이면 $n=2k$

$\therefore$ (나)– $2k$

3. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \dfrac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \dfrac{1}{2}$일 때 성립)

4. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$　　㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2^2 = 4$(참)

㉡$(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5\times 5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$(참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$(참)

5. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}} + \sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 4017

해설

(준식)$= |-2014| + (-2015) = -1$

6. $\sqrt[3]{a\sqrt{a}\times\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$를 간단히 하면?

① $\sqrt[4]{a^3}$ ② $\sqrt[6]{a^5}$ ③ $\sqrt[13]{a^5}$ ④ $\sqrt[7]{a^8}$ ⑤ $\sqrt{a^5}$

해설

$\sqrt[3]{a\sqrt{a}\times\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$

$= \sqrt[3]{a^1\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a\cdot a^{-\frac{1}{4}}}$

$= (a^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

7. $\left(\dfrac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3} = \left(\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= (3^{2\sqrt{2}-3})^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= 3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$= 3^{8-9} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

8. $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$ 일 때, $|x-1| + |x-2|$를 간단히 하면?

① 3　② $2x$

③ $2-3x$ 또는 $3x-2$　④ $3-2x$

⑤ $2x-3$

해설

$x-1>0,\ x-2>0$이므로

$|x-1| + |x-2| = x-1+x-2 = 2x-3$

9. 전제집합 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-1, a+3\}$, $R = \{2, 4, 2a+7\}$ 이고 $q \rightarrow p$, $p \rightarrow \sim r$ 가 항상 참일 때, a 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$q \rightarrow p$, $p \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $Q \subset P$, $P \subset R^c$

$\therefore Q \subset P \subset R^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots$ ㉠

㉠에서 $a + 3 = -1$ 또는 0 또는 1

$\therefore a = -4$ 또는 -3 또는 -2

$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots$ ㉡

㉡에서 $2a + 7 \neq -1, 0, 1$

$2a \neq -8, -7, -6$

$\therefore a \neq -4, -\dfrac{7}{2}, -3$

따라서 ㉠, ㉡ 을 동시에 만족시키는 a 의 값은 -2 이다.

10. m, n 이 정수일 때, 명제 「m^2+n^2 이 홀수이면 mn 은 짝수이다.」의 역, 이, 대우 중 참인 것을 모두 적으면?

① 역 ② 이 ③ 대우

④ 역, 이 ⑤ 역, 이, 대우

해설

(i) 역 : 「mn 이 짝수이면 m^2+n^2 은 홀수이다.」
$m=n=2$ 이면 mn 은 짝수이고 $m^2+n^2=8$ 도 짝수이므로 역은 거짓인 명제이다.
(ii) 역과 이는 서로 대우의 관계가 성립하므로 이도 거짓인 명제이다.
(iii) 대우 : 「mn 이 홀수이면 m^2+n^2 은 짝수이다.」
mn 이 홀수이면 m, n 이 홀수이므로
$m=2k+1$, $n=2l+1$ (k, l 은 정수)로 나타낼 수 있다.
$m^2+n^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2$
$=2(2k^2+2l^2+2k+2l+1)$ 이므로
m^2+n^2 은 짝수이다.
따라서 대우는 참인 명제이다.

11. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $r \Rightarrow p$ ② $\sim p \Rightarrow \sim s$ ③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$ ⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s$, $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

12. x, y가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$ ② $xy > 0$ ③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$ ⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore$ $|xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

13. 두 조건 $p(x)$: $|x-a| \le 1$, $q(x)$: $-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

① 5 개 ② 4 개 ③ 3 개 ④ 2 개 ⑤ 1 개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P = \{x|a-1 \le x \le a+1\}$, $Q = \{x|-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(ⅰ) $-1 < a-1$ 이고 $a+1 < 2$,

즉 $0 < a < 1 \cdots$ ㉠

(ⅱ) $3 \le a-1$ 이고 $a+1 \le 5$, 즉 $a = 4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 정수 a는 4뿐이므로 1개이다.

14. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a|+|b| \geq |a+b|$

② $a \geq b > 0$일 때 $\dfrac{b}{2+a} \geq \dfrac{a}{2+b}$

③ $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc(a>0, b>0, c>0)$

④ $\sqrt{3}+\sqrt{13} > \sqrt{2}+\sqrt{14}$

⑤ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

해설

$$\frac{b}{2+a}-\frac{a}{2+b}=\frac{2b+b^2-2a-a^2}{(2+a)(2+b)}$$

$$=\frac{b^2-a^2+2(b-a)}{(2+a)(2+b)}$$

$$=\frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)}$$ 에서

$(a+2)(b+2)>0$이고

$(b-a) \leq 0,\ a+b+2>0$이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a}-\frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

15. 다음은 $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

> $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
>
> (증명)
>
> $\boxed{(가)} - \boxed{(나)}$
>
> $= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$
>
> $\therefore\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$
>
> 그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}\ \boxed{(다)}\ 0$,
>
> $\sqrt{a+b}\ \boxed{(다)}\ 0$ 이므로 $\therefore\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ <$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ >$

③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ <$

④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ >$

⑤ $(\sqrt{a+b})^2,\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

16. $a > 0$, $b > 0$일 때, $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0,\ b > 0$이므로 산술기하평균의 관계를 이용하면

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1$$

$$= \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}} + 2 = 4$$

17. $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, $x^2 + x^{-2}$ 의 값을 구하면?

① 33 ② 36 ③ 43 ④ 47 ⑤ 49

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 9$$
$$x + x^{-1} + 2 = 9$$
$$\therefore x + x^{-1} = 7$$
$$(x + x^{-1})^2 = 49$$
$$x^2 + x^{-2} + 2 = 49$$
$$\therefore x^2 + x^{-2} = 47$$

18. 실수 a, b가 $(201.4)^a = (0.02014)^b = 10000$을 만족할 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$\log_{201.4} 10^4 = a$

$4\log_{201.4} 10 = a$

$\log_{0.02014} 10000 = b$

$4\log_{0.02014} 10 = b$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{4}\log_{10} 201.4 - \frac{1}{4}\log_{10} 0.02014$$

$$= \frac{1}{4}(\log 2.014 + 2 - \log 2.014 + 2)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

19. $\log_{10} 2 = 0.301$ 일 때,

$\dfrac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$ 의 값은?

① 3.01 ② 6.02 ③ 6.99 ④ 9.03 ⑤ 10

해설

$$\frac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$$

$$= \frac{10(\log_{10} \frac{8}{10} - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} \frac{7}{10} + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$$

$$= \frac{10 \log_{10}(\frac{8}{10} \times \frac{1}{32} \times 8)}{\log_{10}(\frac{7}{10} \times 7 \times \frac{1}{49})}$$

$$= \frac{10 \log_{10} \frac{2}{10}}{\log_{10} \frac{1}{10}} = \frac{10(\log_{10} 2 - 1)}{\log_{10} 10^{-1}}$$

$$= \frac{10(0.301 - 1)}{-1} = 6.99$$

20. 다음 세 수에 대한 상용로그의 정수 부분의 합과 소수 부분의 합을 차례대로 나열한 것은?

$0.02,\quad 200,\quad 2500$

① $3,\ \log_{10} 2$ ② $3,\ \log_{10} 6.5$ ③ $3,\ 1$

④ $4,\ 0$ ⑤ $4,\ \log_{10} 6.5$

해설

$\log_{10} 0.02 = -2 + \log_{10} 2,$

$\log_{10} 200 = 2 + \log_{10} 2,$

$\log_{10} 2500 = 3 + \log_{10} 2.5$

정수 부분의 합은 $-2+2+3=3$

소수 부분의 합은 $\log_{10} 2 + \log_{10} 2 + \log_{10} 2.5 = 1$

21. $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ 일 때, 12^{30} 은 몇 자리 수인가?

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{30} &= 30\log(2^2 \times 3)\\ &= 30(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3)\\ &= 30(2 \times 0.3010 + 0.4771)\\ &= 32.3730 = 32 + 0.3730\end{aligned}$$

$\log_{10} 12^{30}$ 의 지표가 32 이므로
12^{30} 은 33 자리 정수이다.

22. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\log(S_n+1)=n$이 성립한다. 이때, 다음 중 수열 $\{a_n\}$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 첫째항이 1이고, 공차가 10인 등차수열이다.

② 첫째항이 1이고, 공비가 10인 등비수열이다.

③ 첫째항이 9이고, 공차가 30인 등차수열이다.

④ 첫째항이 9이고, 공비가 $\sqrt{10}$인 등비수열이다.

⑤ 첫째항이 9이고, 공비가 10인 등비수열이다.

해설

$\log(S_n+1)=n$에서 $S_n+1=10^n$이므로 $S_n=10^n-1$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=10-1=9$

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(10^n-1)-(10^{n-1}-1)$

$=9\cdot 10^{n-1}$

이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 $a_n=9\cdot 10^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9이고, 공비가 10인 등비수열이다.

23. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 모두 구하여 원소나열법으로 나타내어라.

㉠ 모든 원소는 20 이하의 자연수이다.
㉡ $2 \in A,\ 3 \in A$
㉢ $a \times b \in A,\ a \in A,\ b \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,16,\ 18\}$

해설

$2 \in A,\ 3 \in A$ 이고, 모든 원소는 20 이하의 자연수이므로

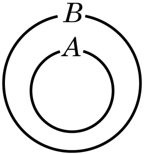
$2 \times 2 = 4 \in A,\quad 2 \times 3 = 6 \in A$

$3 \times 3 = 9 \in A,\quad 3 \times 4 = 12 \in A,\quad 3 \times 6 = 18 \in A$

$4 \times 2 = 8 \in A,\quad 4 \times 4 = 16 \in A$

24. 두 집합

$A = \{x \mid x$는 12의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 b의 배수$\}$ 의 관계가 다음의 벤 다이어그램과 같을 때, b 의 값으로 가능한 모든 자연수의 합을 구하여라. (단, $1 < b < 12$)



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

12 의 약수가 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 이므로 이 약수의 배수의 집합이 12 의 배수의 집합을 포함한다. 문제의 조건이 $1 < b < 12$ 이므로 $b = 2, 3, 4, 6$ 이고, 합은 15 이다.

25. 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, U 는 전체집합이고, A^c 는 A 의 여집합이다.)

① $A \subset B$ 이면 $B^c \subset A^c$ 이다.

② $A = B^c$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.

③ $A \cap B = \varnothing$ 이고 $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.

④ $A \subset B$, $A \subset C$ 이면 $A \subset (B \cup C)$ 이다.

⑤ $A \cap B^c = \varnothing$ 이면 $A^c \cup B = U$ 이다.

해설

① $A \subset B$ 이므로 $B^c \subset A^c$

② $A = B^c$ 이므로 $A \cup B = B^c \cup B = U$

③ 예를 들어 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{3,\ 4\}$ 일 때, $A \cap B = \varnothing$ 이지만 $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \neq U$ 이므로 옳지 않다.

④ $A \subset B$, $A \subset C$ 이므로 $A \subset (B \cap C) \subset (B \cup C)$

$\therefore\ A \subset (B \cup C)$

⑤ $A \cap B^c = \varnothing$ 에서 $(A \cap B^c)^c = \varnothing^c$

$\therefore\ A^c \cup B = U$

26. 두 집합 $A=\{x|x$는 10 이상 15 이하의 자연수$\}$, $B=\{x|x$는 12 이상 18 미만의 3 의 배수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$X \subset A$, $B \subset X$, $n(X)=4$

▶ **답 :** ＿＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 6 개

해설

$A=\{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

$B=\{12,\ 15\}$

$X \subset A$, $B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$

$\{12,\ 15\} \subset X \subset \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4 개인 집합이므로

$\{10,\ 11,\ 12,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 13,\ 15\}$,

$\{10,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 13,\ 15\}$,

$\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ 의 6 개이다.

27. 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 일 때, 적어도 하나는 홀수를 원소로 갖는 A 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 48 개　② 44 개　③ 40 개　④ 35 개　⑤ 32 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
짝수로만 이루어진 부분집합은 $\{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 의 부분집합 중 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는 $2^4 - 1 = 15$(개) 이다.
A 의 전체 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$(개) 이고 그 중 공집합을 제외한 것은 63 개이다.
적어도 하나는 홀수를 원소로 갖는 부분집합을 짝수로만 이루어진 부분집합을 제외한 것이므로 구하는 개수는 $63 - 15 = 48$(개) 이다.

28. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

㉠ $A=\{2,\ a,\ a^2\},\ B=\{b,\ c,\ 4\}$
㉡ $A \subset B,\ B \subset A$
㉢ $a,\ b,\ c$ 가 서로 다른 자연수

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$A \subset B,\ B \subset A$ 이므로 $A=B$

$4 \in B$ 이므로 $4 \in A$

$a=4$ 또는 $a^2=4$

(i) $a=4$ 일 때, $A=\{2,\ 4,\ 16\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

$\therefore\ b=2,\ c=16$ 또는 $b=16,\ c=2$

(ii) $a^2=4$ 일 때, $a=2$ (a 는 자연수)

$A=\{2,\ 2^2\}=\{2,\ 4\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

b 또는 c 가 2 이어야 하므로 $a,\ b,\ c$ 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a+b+c=4+2+16=22$

29. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

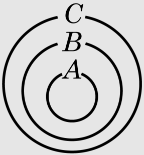
② $A \subset B$, $B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

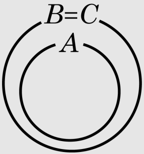
③ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = B = C$ 이다.

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

① 

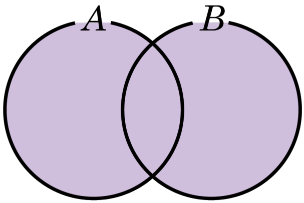
② 

③ 예를 들면 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ 이면, $A \subset B$, $B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면, $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면, $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

30. 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15\}$, $B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 105

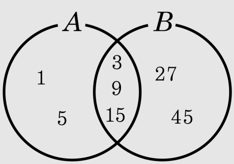
해설

$B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.

원소나열법으로 고쳐보면,

$B = \{3,\ 9,\ 15,\ 27,\ 45\}$ 이다.

벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



색칠한 부분의 원소는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 27,\ 45\}$ 이다.

따라서 모든 원소의 합은

$1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 27 + 45 = 105$ 이다.

31. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 사이에 $[A\cap(A^c\cup B)]\cup[B\cap(B^c\cap C^c)^c]=A\cup B$ 인 관계가 있을 때, 옳은 것은 ?

① $A\subset B$　② $B\subset A$　③ $(A\cup B)\subset C$

④ $C\subset(A\cup B)$　⑤ $(A\cap B)\subset C$

해설

$A\cap(A^c\cup B)=(A\cap A^c)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$,

$B\cap(B^c\cap C^c)^c=B\cap[(B^c)^c\cup(C^c)^c]=B\cap(B\cup C)=B$

따라서, 조건식은 $(A\cap B)\cup B=A\cup B$

그런데, $(A\cap B)\cup B=B$ 이므로

$B=A\cup B$ 이다.

즉, $A\cup B=B$

$\therefore A\subset B$

32. 전체집합 $U = \{x|x$는 15이하의 홀수$\}$ 에 대하여 $A = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$, $B = \{7,\ 13\}$ 일 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $A \cap B = \{7\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$

㉢ $A^c \cap B = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = \{5,\ 9,\ 15\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$U = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\}$

$A = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$,$B = \{7,\ 13\}$

㉡ $A \cap B^c = A - B = \{1,\ 3,\ 11\}$

㉢ $A^c \cap B = B - A = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5,\ 9,\ 15\}$

33. 두 집합 $A = \{3,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$, $B = \left\{x \middle| x\text{는 } 3 \le x \le 5\text{인 자연수}\right\}$ 에 대하여 $(A-B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____개

▷ 정답 : 8개

해설

$B = \{3,\ 4,\ 5\}$

$(A-B) \cup X = X$ 이므로 $(A-B) \subset X$

$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$\{6,\ 8,\ 9,\ 11\} \subset X \subset \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$

집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 6, 8, 9, 11 을 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore\ 2^{7-4} = 2^3 = 8$ (개)

34. 지성이는 자기 반 학생 35명의 키와 몸무게를 조사하여 '키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.' 라는 결론을 내렸다. 다음 <보기> 중 지성의 결론이 참인지 알아보기 위해 반드시 확인해야 할 것을 모두 고르면?

> ㉠ 키가 180cm인 학생의 몸무게
>
> ㉡ 키가 170cm인 학생의 몸무게
>
> ㉢ 몸무게가 70kg인 학생의 키
>
> ㉣ 몸무게가 60kg인 학생의 키

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

지성이의 결론 '키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.'가 참이면 키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 반드시 65kg 이상이어야 하므로 키가 180cm인 학생의 몸무게가 65kg 이상인지 반드시 확인해야 한다. 또한, 지성이의 결론이 참이면 결론의 대우 '몸무게가 65kg미만인 학생의 키는 175cm 미만이다.'도 참이므로, 몸무게가 60kg인 학생의 키가 175cm 미만인지 확인해야 한다.

∴ ㉠, ㉣

35. $\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$일 때, $\dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{5}{4}$ ④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}$

해설

$\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$에서

$a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x}) = 2a^x - 2a^{-x}$

$a^x = 3a^{-x}$이므로 $a^{2x} = 3$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{4}$$

36. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2-ax+1)$이 정의되기 위한 정수 a의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a-3|>0$이고 $|a-3|\neq 1$

$\therefore a\neq 3,\ a\neq 2,\ a\neq 4 \cdots\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 진수조건에서 $3ax^2-ax+1>0$

① $a=0$ 일 때, $1>0$ 이므로 성립

② $a>0$일 때, 방정식 $3ax^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-12a<0,\ a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$

①, ②에서 $0\leq a<12 \cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수는 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 9개다.

37. x에 대한 이차방정식 $x^2-9ax+81=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이고, x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\log_3\frac{1}{|\alpha|},\ \log_3\frac{1}{|\beta|}$일 때, $\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta}$의 값을 구하면?(단, $ab\neq 0$)

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$x^2-9ax+81=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 $\alpha+\beta=9a,\ \alpha\beta=81$

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\log_3\frac{1}{|\alpha|},\ \log_3\frac{1}{|\beta|}$이므로

$$\log_3\frac{1}{|\alpha|}+\log_3\frac{1}{|\beta|}=-a$$

$$\log_3\frac{1}{|\alpha|}+\log_3\frac{1}{|\beta|}=\log_3\frac{1}{|\alpha\beta|}=\log_3\frac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4$$

$\therefore\ a=4$

따라서 $\alpha+\beta=36$ 이므로 $\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta}=\frac{3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{4}{3}$

38. 집합 $A=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

(1) $B \subset A$ (2) B 의 원소의 개수는 3 개 이하이다.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 42 개

해설

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
원소의 개수가 3 이하인 집합 A 의 부분집합은 다음과 같다.
원소가 0 개인 부분집합 : $\varnothing$
원소가 1 개인 부분집합 :
$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{6\},\ \{12\}$
원소가 2 개인 부분집합 :
$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{1,\ 6\},\ \{1,\ 12\},$
$\{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{2,\ 12\},\ \{3,\ 4\},$
$\{3,\ 6\},\ \{3,\ 12\},\ \{4,\ 6\},\ \{4,\ 12\},\ \{6,\ 12\}$

원소가 3 개인 부분집합 :
$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 2,\ 12\},$
$\{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 12\},\ \{1,\ 4,\ 6\},$
$\{1,\ 4,\ 12\},\ \{1,\ 6,\ 12\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\{2,\ 3,\ 6\},$
$\{2,\ 3,\ 12\},\{2,\ 4,\ 6\},\{2,\ 4,\ 12\},\{2,\ 6,\ 12\},$
$\{3,\ 4,\ 6\},\{3,\ 4,\ 12\},\{3,\ 6,\ 12\},\{4,\ 6,\ 12\}$

39. 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, \cdots, 2^m\}$ 의 부분집합 중에서 1 과 2 는 반드시 포함하고, 2 를 제외한 짝수 번째 원소들은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1 과 2 는 반드시 포함하고 2 를 제외한 짝수 번째 원소들의 개수 $\frac{m}{2} - 1$ (개)는 반드시 포함하지 않으므로

$2^{m-2-(\frac{m}{2}-1)} = 64$ 이므로

$m - 2 - (\frac{m}{2} - 1) = 6,\ \frac{m}{2} - 1 = 6$,

$m = 14$

40. $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ 이다. $n(A \cap B \cap X) = 1$, $B \cup X = B$ 인 집합 X 는 모두 몇 개인가?

① 21 개 ② 22 개 ③ 23 개 ④ 24 개 ⑤ 25 개

해설

$A \cap B = \{2,\ 4,\ 6\}$, $B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$,
즉 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 2, 4, 6 중 어느 하나만 원소로 갖는 집합이므로
2, 4, 6 중 2 만을 원소로 가질 때 $2^3 = 8$
4, 6 만을 원소로 가질 때에도 마찬가지 이므로
집합 X 의 개수는 $8 \times 3 = 24$ (개)

41. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, $n(A^c)$ 의 값을 구하여라.

(가) $\{3, 4\} \subset A$ (나) $p \in A,\ q \in A$ 이면 $p+q \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3, 4$ 는 집합 A 의 원소이므로 이 수를 이용하여 집합 A 의 원소가 될 수 있는 수들을 나열해보면 $3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$ $\cdots$

따라서 $A^c = \{1, 2, 5\}$ 이고, $n(A^c) = 3$

42. 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 3 개, 8 개, 10 개이다. $(A-C)\cup(B\cap C^c)=\varnothing$ 를 만족하는 세 집합 A , B , C 에 대하여 $n(C-A)+n(C-B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(A-C)\cup(B\cap C^c)=\varnothing$ 는

$A-C=\varnothing,\ B-C=\varnothing\ \rightarrow\ A\subset C,\ B\subset C$

$\therefore n(C-A)+n(C-B)=(10-3)-(10-8)=5$

43. 집합 $A = \{x \mid x$는 8보다 작은 자연수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 16의 약수$\}$,
$C = \{x \mid 5 < x \leq 10,\ x$는 정수$\}$ 에 대하여
$A * B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 라 할 때 $(B * A) \cap C$ 의 집합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{6, 7, 8\}$

해설

$B * A = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 16\}$
$(B * A) \cap C = \{6,\ 7,\ 8\}$

44. 집합 A, B가 유한집합 U의 부분집합이고, $n(U) = 60$, $n(A) = 42$, $n(B) = 18$일 때, $n(A \cup B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면, $M - m$의 값은 얼마인가?

① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 38

해설

(i) $n(A \cup B) \le n(U) = 60$

(ii) $n(A \cap B) \le n(A)$, $n(A \cap B) \le n(B)$ $\therefore$ $n(A \cap B) \le 18$

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$18 \ge 42 + 18 - n(A \cup B)$

$\therefore$ $n(A \cup B) \ge 42$

$\Rightarrow$ $42 \le n(A \cup B) \le 60$

$\therefore$ $m = 42$, $M = 60$

$M - n = 18$

45. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a^2 = b^2 + c^2,\ b + c \le ka$ 를 만족하는 양의 상수 k 의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b + c \le ka$ 에서 $b + c > 0$ 이므로
$(b+c)^2 \le k^2a^2,\quad (b+c)^2 \le k^2(b^2+c^2)$
그러므로 $(k^2-1)b^2 - 2bc + (k^2-1)c^2 \ge 0$
이 임의의 양수 $b,\ c$ 에 대하여 성립할 조건은
$k^2 - 1 > 0,\quad D/4 = c^2 - (k^2-1)^2c^2 \le 0$
두 식에서 $k > 0$ 이므로 $k \ge \sqrt{2}$
따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

46. m, n이 정수일 때, $\dfrac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은?

① 288 ② 2534 ③ 3042 ④ 5164 ⑤ 7254

해설

$\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$ 이고 $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\frac{1}{m}} = 3^{-\frac{4}{m}}$

이 수가 자연수가 되려면 $-\dfrac{6}{n}$과 $-\dfrac{4}{m}$가 모두 자연수가 되어야 하므로

$n = -1, -2, -3, -6$ 이고 $m = -1, -2, -4$ 이다.

따라서 $\dfrac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은

$(2^6 + 2^3 + 2^2 + 2)(3^4 + 3^2 + 3) = 78 \times 93 = 7254$

47. a, b가 유리수라 하면 서로소인 두 정수 p, q에 대하여 $\log_6(2^a \cdot 3^b) = \frac{q}{p}$(단, $p = q$)로 쓸 수 있다.

로그의 정의에 의하여 $2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$ 이때, $ap =$ (가)이고 $a \neq b$이므로 (나) 이것은 가정에 모순이다. 따라서, $\log_6(2^a \cdot 3^b)$은 무리수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① bp, $p = q$　② bp, $p = 0$　③ bp, $p = 0$

④ bp, $q = q$　⑤ bp, $p = 0$

해설

$2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$ 에서 $(2^a \cdot 3^b)^p = 6^q = (2 \cdot 3)^q$

$\therefore\ 2^{ap} \cdot 3^{bp} = 2^q \cdot 3^q$ 에서 $ap = bp\ \cdots$(가)

$(a - b)p = 0$

$a \neq b$이므로 $p = 0\ \cdots$(나)

48. 2^{2014}이 n자리의 정수라고 할 때, $\frac{1}{2^{2014}}$은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나오는가?

① n ② $n+1$ ③ $n-1$ ④ 2014 ⑤ 2015

해설

$\log 2^{2014}$의 가수는 0이 아니므로

$\log 2^{2014} = n-1+\alpha(0<\alpha<1)$

$\log 2^{\frac{1}{2014}} = \log 2^{-2014} = -2014\log 2$

$= -(n-1+\alpha)$

$= -n+1-\alpha(\because\ 0<1-\alpha<1)$

$\log 2^{\frac{1}{2014}}$의 지표는 $-n$, 가수는 $1-\alpha$이므로

소수점 아래 n번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다.

49. 2^{30} 의 최고 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\log 2^{30} = 30\log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$

이므로 $\log 2^{30}$ 의 가수는 0.03 이다.

$\log 1 = 0,\ \ \log 2 = 0.3010$ 이므로

$\log 1 < 0.03 < \log 2$

$9 + \log 1 < 9.03 < 9 + \log 2$

$\log(1 \times 10^9) < \log 2^{30} < \log(2 \times 10^9)$

따라서 $1 \times 10^9 < 2^{30} < 2 \times 10^9$ 이므로

2^{30} 의 최고 자리의 숫자는 1 이다.

$\therefore a = 1$

한편, $2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ 2^7 = 128,\ 2^8 = 256, \cdots$

이므로 2^n 의 일의 자리의 숫자는 $2, 4, 8, 6$ 이 반복된다.

$30 = 4 \times 7 + 2$ 이므로 2^{30} 의 일의 자리의 숫자는 2^2 의 일의 자리의 숫자와 같다.

$\therefore b = 4$

$\therefore a + b = 1 + 4 = 5$

50. 어떤 기관이 조사 결과 주택지구와 상업지구에서 발생하는 쓰레기의 양은 다음 표와 같다. 전체 넓이가 같은 두 도시 A, B의 2014년 현재 주택지구와 상업지구의 넓이는 각각 50%로 같다고 한다. 2019년까지 5년 동안 A도시는 주택지구를 매년 10%씩 증가시키고, B도시는 상업지구를 매년 10%씩 증가시킬 계획을 수립하였다. 이때, 두 도시의 계획이 성공적으로 이루어졌을 경우 A도시와 B도시의 전체 쓰레기 발생량의 비를 구하면? (단, $\log 1.1 = 0.04$, $\log 1.6 = 0.2$로 계산하고, 두 도시 A와 B의 넓이는 항상 일정하다.)

	100m^2 당 하루 쓰레기 발생량(kg)
주택지구	0.4
상업지구	1.4

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 3 : 4

해설

2014년도 A도시와 B도시의 주택지구와 상업지구의 넓이를 각각 $\frac{1}{2}$이라 하자.

2019년도 A도시의 주택지구와 B도시의 상업지구의 넓이는 각각 $\frac{1}{2} \times 1.1^5$이다.

$\log 1.1^5 = 5 \log 1.1$

$= 5 \times 0.04 = 0.2 = \log 1.6 = 0.2$

따라서 A도시의 주택지구와 상업지구의 넓이의 비는 0.8, 0.2

B도시의 주택지구와 상업지구의 넓이의 비는 0.2, 0.8

그러므로 두 도시의 쓰레기 발생량의 비는

$(0.8 \times 0.4 + 0.2 \times 1.4) : (0.2 \times 0.4 + 0.8 \times 1.4)$

$= 0.6 : 1.2 = 1 : 2$