1. 두 집합 A, B 에 대하여 $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $A\cap B=\{3,\ 7\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 일 때, 집합 A는?

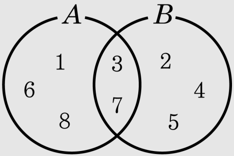
① $\{2,\ 3,\ 4,\ 7\}$ ② $\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$

③ $\{1,\ 3,\ 6,\ 7\}$ ④ $\{1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$

해설

벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



그러므로 집합 $A=\{1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 이다.

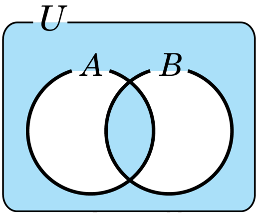
2. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 $A = \{1,\ 3,\ 5\}$, $B = \{2,\ 3\}$ 일 때, $A^c, A - B$ 는?

① $A^c = \{1\}$, $A - B = \{1, 3\}$
② $A^c = \{1, 3\}$, $A - B = \{2, 4\}$
③ $A^c = \{2, 4\}$, $A - B = \{1, 5\}$
④ $A^c = \{3\}$, $A - B = \{1, 5\}$
⑤ $A^c = \{2, 4\}, A - B = \{1, 3\}$

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 이므로 $A^c = \{2, 4\}$ 이고 $A - B = \{1, 5\}$ 이다.
따라서 ③이다.

3. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내고 있는 집합을 모두 고르면?(정답 2개)



① $U-((A-B)\cup(B-A))$　② $(B-A)^c$

③ $(A-B)\cup(B-A)$　④ $U-(A\cup B)$

⑤ $(A\cup B)^c\cup(A\cap B)$

해설

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 ① $U-((A-B)\cup(B-A))$, ⑤ $(A\cup B)^c\cup(A\cap B)$ 이다.

4. 전체집합 U의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$에 대하여, $(A-B)^c-B$를 간단히 한 것을 다음 중 고르면?

① $(A \cup B)^c$ ② $(A \cup B)$ ③ $A \cap B^c$

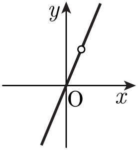
④ $A^c \cup B$ ⑤ $A^c \cup B^c$

해설

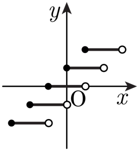
$$(A-B)^c - B = (A \cap B^c)^c \cap B^c = (A^c \cup B) \cap B^c = (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$$
$$= (A \cup B)^c \cup \varnothing = (A \cup B)^c$$

5. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x에서 y로의 함수인 것은?

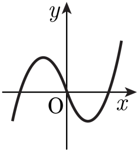
①



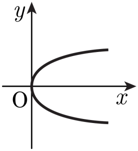
②



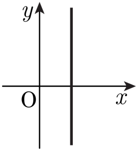
③



④



⑤



해설

①은 대응되지 못하는 x의 값이 존재하고
②, ④, ⑤는 x의 한 값에
y의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

6. 두 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

두 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여
X 에서 Y 로의 상수함수는
$f(x)=1,\ f(x)=2,\ f(3)=3$ 의 3 개가 있다.

7. $x : y : z = 1 : 2 : 3$일 때, $\dfrac{z^2}{xy} + \dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{xz}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x = k$라 하면, $y = 2k,\ z = 3k$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{xy} + \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} = \frac{9k^2}{2k^2} + \frac{k^2}{6k^2} + \frac{4k^2}{3k^2}$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = 6$$

8. $2+\sqrt{3}=\sqrt{a+b\sqrt{3}}$($a$, b는 유리수) 일 때, $a-b$의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$2+\sqrt{3}=\sqrt{a+b\sqrt{3}}$
양변을 제곱하면
$4+3+4\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}$
$\therefore\ a=7,\ b=4 \quad \therefore\ a-b=7-4=3$

9. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}}$의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$　　② $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$

③ $\{x \mid x \geq 1\}$, $\{y \mid y \leq 0\}$　　④ $\{x \mid x \leq 1\}$, $\{y \mid y \geq 0\}$

⑤ $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \leq 1\}$

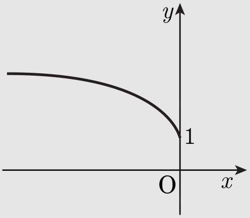
해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}} \\ &= \sqrt{-3x+1+2\sqrt{(-3x)\cdot 1}} \\ &= \sqrt{-3x}+1 \end{aligned}$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$



10. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$의 값은?

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$\frac{10(2a+9d)}{2} = 120 \quad \therefore \ 2a+9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a+3d) + (a+6d) = 2a+9d = 24$$

11. 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$, $B = \{x \mid x$는 9의 약수$\}$에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $1 \in A$

② $n(A) < n(B)$

③ $6 \notin B$

④ $B = \{1,\ 3,\ 9\}$

⑤ 집합 A, B 는 모두 유한집합이다.

해설

② $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이므로 $n(A) > n(B)$ 이다.

12. 명제 '$x > 1$ 인 어떤 x 에 대하여 $x^2 < 1$ 또는 $x^2 = 1$ '의 부정은?

① $x \leq 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$

② $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$

③ $x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \geq 1$

④ $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \geq 1$

⑤ $x \leq 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 \geq 1$

해설

$x > 1$은 대전제이므로 부정이 적용되지 않는다.
$\sim$ (어떤x) $\leftrightarrow$ (모든 x), $\sim$ (또는) $\leftrightarrow$ (그리고),
$\sim (x^2 < 1) \leftrightarrow (x^2 \geq 1)$, $\sim (x^2 = 1) \leftrightarrow (x^2 \neq 1)$
따라서 주어진 명제의 부정은 '$x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$ '이다.

13. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.

② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.

③ 4 의 배수는 2 의 배수이다.

④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.

⑤ $x+y \leq 5$ 이면 $x \leq 2, y \leq 3$ 이다.

해설

'역' 의 대우인 '이' 가 참인지 확인 한다.

① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례 : $x=2$

② x 가 3 의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례 : $x=5$

③ 4 의 배수가 아니면 2 의 배수가 아니다 (거짓) 반례 : 6

④ $2x \leq x+3 \to x \leq 3$ (참)

⑤ $x+y > 5 \to x > 2$ 또는 $y \geq 3$ (참)

14. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 <u>아닌</u> 것은?

① $p : ac = bc,\ \ q : a = b$

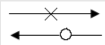
② $p : A \subset B,\ \ q : A - B = \varnothing$

③ $p : a > 0$ 이고 $b < 0,\ \ q : ab < 0$

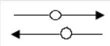
④ $p : a + b$ 가 정수, $q : a,\ b$ 가 정수

⑤ $p : \triangle\mathrm{ABC}$ 는 정삼각형이다. $q : \triangle\mathrm{ABC}$ 의 세 내각의 크기가 같다.

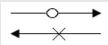
해설

① $ac = bc$  $a = b$ (반례 : $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$)

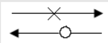
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

② $A \subset B$  $A - B = \varnothing$

따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

③ $a > 0$ 이고 $b < 0$  $ab < 0$ (반례 : $a = -2,\ b = 2$)

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건

④ $a + b$ 가 정수  $a,\ b$ 가 정수 (반례 : $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$)

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건

⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.

따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

15. $x+3 \neq 0$이 $x^2+ax-6 \neq 0$이기 위한 필요조건일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2+ax-6 \neq 0$이면 $x+3 \neq 0$이다.(참)
대우 : $x+3=0$이면 $x^2+ax-6=0$이다.(참)
$x^2+ax-6=0$에 $x=-3$ 대입 $\therefore a=1$
부정문으로 된 명제는 대우를 사용하여 긍정문으로 바꾸면 판단하기가 쉬워진다.

16. 다음은 $|a| < 1$, $|b| < 1$, $|c| < 1$ 일 때 부등식 $abc + 2 > a + b + c$ 가 성립함을 증명한 것이다. ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$abc + 2 > a + b + c$$
$$= abc + 1 + 1 - a - b - c$$
$$= (1 - ab)(1 - c) + (㉠)$$

$|a| < 1$ 이므로 $(㉡) < 1 - a < (㉢)$

같은 방법으로 $(㉡) < 1 - b < (㉢)$,

$(㉡) < 1 - c < (㉢)$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $(㉡) < 1 - ab < (㉢)$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c) = (1 - ab)(1 - c) + (㉠) > (㉡)$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

① $(1 + a)(1 + b), 0, 2$

② $(1 - a)(1 + b), 0, 2$

③ $(1 + a)(1 + b), -1, 1$

④ $(1 - a)(1 - b), 0, 2$

⑤ $(1 - a)(1 - b), -1, 1$

해설

$$abc + 2 > a + b + c = abc + 1 + 1 - a - b - c$$
$$= abc - ab - c + 1 + 1 + ab - a - b$$
$$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b)$$

$|a| < 1$ 이므로 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 < 1 - a < 2$

$|b| < 1$ 이므로 $-1 < b < 1$ 이므로 $0 < 1 - b < 2$

$|c| < 1$ 이므로 $-1 < c < 1$ 이므로 $0 < 1 - c < 2$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $0 < 1 - ab < 2$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c)$

$$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) > 0$$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

17. $x < 0$일 때, $x + \dfrac{3}{x}$의 최댓값은?

① $-2\sqrt{3}$　　② $-\sqrt{3}$　　③ 0

④ $\sqrt{3}$　　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x = -a(a > 0)$이라고 하면

$$x + \frac{3}{x} = -a - \frac{3}{a} = -\left(a + \frac{3}{a}\right) \le -2\sqrt{3}$$

$$\left(\because\ a + \frac{3}{a} \ge 2\sqrt{a \times \frac{3}{a}}\right)$$

18. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = ax - 3$, $g(x) = 2x + b$ 에 대하여 $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하면?

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

$f(1) = g(1)$ 에서 $a - 3 = 2 + b$

$\therefore\ a - b = 5 \cdots$ ㉠

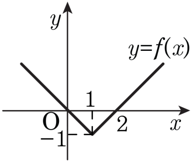
$f(2) = g(2)$ 에서 $2a - 3 = 4 + b$

$\therefore\ 2a - b = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 2$, $b = -3$

$\therefore\ a - b = 2 - (-3) = 5$

19. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)$ 는?



① $f(x) = |x+1|+1$

② $f(x) = |x+1|-1$

③ $f(x) = |x-1|+1$

④ $f(x) = |x-1|-1$

⑤ $f(x) = -|x-1|+1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = |x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 $y = |x|$ 에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+1$ 을 대입하면

$y+1 = |x-1|$

$y = |x-1|-1$

$\therefore f(x) = |x-1|-1$

20. $x^2 - x - 6 \geq 0$ 일 때, 함수 $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - x - 6 \geq 0$ 에서

$(x+2)(x-3) \geq 0$

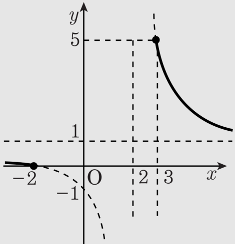
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

$y = \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{(x-2)+4}{x-2}$

$= \dfrac{4}{x-2} + 1$

즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 에서

$y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과



같으므로 $x = -2$ 일 때, 최솟값 0,

$x = 3$ 일 때, 최댓값 5

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

21. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 11,\ a_3 + a_4 + a_5 = 54$가 성립할 때, a_{10}의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

해설

공차를 d라 하면 $a_1 + a_2 = 11$에서 $a_1 + \{a_1 + (2-1)d\} = 11$

$\therefore\ 2a_1 + d = 11 \cdots$ ㉠

$a_3 + a_4 + a_5 = 54$에서 $(a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 54$

$\therefore\ a_1 + 3d = 18 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1 = 3,\ d = 5$

$\therefore\ a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \times 5 = 48$

22. 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이 세 수의 평균은 8이고 분산이 6일 때, 곱 abc의 값은?

① 360 ② 384 ③ 400 ④ 440 ⑤ 510

해설

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$a = b - d$, $c = b + d$이므로

$$\frac{(b-d) + b + (b+d)}{3} = 8$$

$\therefore b = 8$

$\therefore a = 8 - d$, $b = 8$, $c = 8 + d$

세 수의 분산이 6이므로

$$\frac{(8-d-8)^2 + (8-8)^2 + (8+d-8)^2}{3} = 6$$

$\therefore d^2 = 9$, $d = \pm 3$

$\therefore a = 5$, $b = 8$, $c = 11$ 또는 $a = 11$, $b = 8$, $c = 5$

$\therefore abc = 440$

23. 0이 아닌 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$과 b, c, d가 이 순서대로 각각 조화수열을 이룰 때, 다음 중 옳은 것은?

① $ad = bc$ ② $ab = cd$ ③ $abcd = 1$

④ $a + b = d$ ⑤ $a - d = b - c$

해설

$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$가 조화수열을 이루면 a, b, c가 등차수열을 이루므로

$2b = a + c \cdots$ ㉠

또, b, c, d가 조화수열을 이루므로

$c = \dfrac{2bd}{b+d} \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $c = \dfrac{(a+c)d}{b+d}$

$bc + cd = ad + cd \quad \therefore\ bc = ad$

24. $A=\{1,\ \{2,\ 3\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\{2,\ 3\}\in A$ ② $\{2,\ 3\}\subset A$ ③ $\{1,\ \{2,\ 3\}\}\subset A$

④ $1\in A$ ⑤ $\{2,\ 3\}\in A$

해설

② $\{2,\ 3\}\not\subset A$

25. 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, U 는 전체집합이고, A^c 는 A 의 여집합이다.)

① $A \subset B$ 이면 $B^c \subset A^c$ 이다.

② $A = B^c$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.

③ $A \cap B = \varnothing$ 이고 $A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.

④ $A \subset B,\ A \subset C$ 이면 $A \subset (B \cup C)$ 이다.

⑤ $A \cap B^c = \varnothing$ 이면 $A^c \cup B = U$ 이다.

해설

① $A \subset B$ 이므로 $B^c \subset A^c$

② $A = B^c$ 이므로 $A \cup B = B^c \cup B = U$

③ 예를 들어 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{3,\ 4\}$ 일 때, $A \cap B = \varnothing$ 이지만 $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \neq U$ 이므로 옳지 않다.

④ $A \subset B,\ A \subset C$ 이므로 $A \subset (B \cap C) \subset (B \cup C)$

$\therefore\ A \subset (B \cup C)$

⑤ $A \cap B^c = \varnothing$ 에서 $(A \cap B^c)^c = \varnothing^c$

$\therefore\ A^c \cup B = U$

26. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모두 실수 x 에 대하여 $f(x) \cdot g(x) = 0$ 을 만족시킨다. 두 집합 $A = \{x|f(x) = 0\}$, $B = \{x|g(x) = 0\}$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① A와 B는 모두 무한집합

② A와 B는 모두 유한집합

③ A가 유한집합이면 B는 무한집합

④ A가 무한집합이면 B는 유한집합

⑤ A가 무한집합이면 B는 무한집합

해설

$f(x) \cdot g(x) = 0 \;\leftrightarrow\; f(x) = 0$ 또는 $g(x) = 0$ 이므로 $A \cup B$ 는 무한집합

$\therefore$ A가 유한집합이면 B는 반드시 무한집합

27. $< x >= x - [x]$ 라 할 때,

$< \sqrt{3+2\sqrt{2}} > - \dfrac{1}{< \sqrt{3+2\sqrt{2}} >}$ 의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $-2\sqrt{2}$　② -2　③ -1

④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}$$

$$= \sqrt{2}+1 = x$$ 라 하자.

$[x] = 2,\ < x >= \sqrt{2}-1$

$$(\text{준식}) = (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1) = -2$$

28. $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}+1$ 일 때, a^2+b^2-ab-a 의 값을 구하면?

① 1　② -1　③ 2

④ $4-2\sqrt{2}$　⑤ $2-\sqrt{2}$

해설

$$a=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$b=\sqrt{2-\sqrt{3}}+1=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}+1$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+1$$

$$b-1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}a^2+b^2-ab-a&=(a-b)^2+ab-a\\&=(a-b)^2+a(b-1)\\&=(\sqrt{2}-1)^2+1\\&=4-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

29. 두 함수 f, g 가 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x}+1$ 일 때, $0 \le x \le 4$ 에서 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x}+1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+1+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$\sqrt{x}=t$ 로 놓으면

$0\le x\le 4$ 에서 $0\le t\le 2$ 이므로

주어진 함수는 $y=\dfrac{1}{t+2}(0\le t\le 2)$

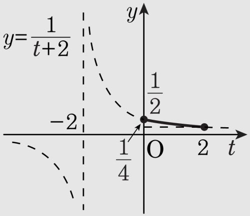
따라서 다음 그림에서 $t=0$ 일 때

최댓값은 $\dfrac{1}{2}$,

$t=2$ 일 때

최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이므로

구하는 합은 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$



30. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 보기와 같을 때, 보기 중 수열 $\{a_n\}$이 등비수열인 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$

ㄴ $S_n = 2^{n-1} - 2$

ㄷ $S_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) - \left(2^{n-2} - \frac{1}{2}\right) = 2^{n-2}$

이것은 $n = 1$일 때에도 성립하므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열이다.

ㄴ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = -1$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n-1} - 2) - (2^{n-2} - 2) = 2^{n-2}$

이것은 $n = 1$일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.

ㄷ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{3}{8}$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right\} - \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

이것은 $n = 1$일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.

따라서 보기 중 등비수열인 것은 ㄱ이다.

31. 모든 실수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x)=[x]+[-x]$ 의 치역은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $\{-1,\ 0\}$ ② $\{-1,\ 1\}$ ③ $\{0,\ 1\}$

④ $\{-1,\ 0,\ 1\}$ ⑤ $\{0\}$

해설

정수 n 에 대하여

(i) $x=n$ 이면

$f(x)=[x]+[-x]=n+(-n)=0$

(ii) $n<x<n+1$ 이면

$-n-1<-x<-n$ 이므로 $[-x]=-n-1$

$\therefore\ f(x)=[x]+[-x]=n+(-n-1)=-1$

(i), (ii) 에서 구하는 치역은 $\{-1,\ 0\}$ 이다.

32. 집합 $D=\{x \mid -2a \le x \le a\}$ 에서 집합 $R=\{x \mid x$ 는 실수$\}$ 로의 함수 f 가 $f(x)=x^2+b$ 이고 $f(D)=D$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, $ab \neq 0$)

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a \ge -2a$ 이므로 $a > 0$

그림에서

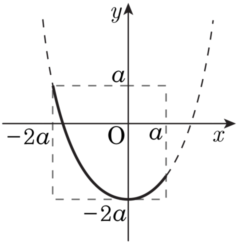
$f(0) = b = -2a \cdots$ ㉠

$$f(-2a) = 4a^2 + b$$
$$= a \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$a = \frac{3}{4},\ b = -\frac{3}{2}$

$\therefore a + b = -\frac{3}{4}$



33. $a,\ b$는 실수이고, $a^3=26+15\sqrt{3},\ b^3=26-15\sqrt{3}$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 의 값을 구하면?

① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $-3\sqrt{3}$

해설

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=52$

$(ab)^3=(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})=1 \qquad \therefore\ ab=1$

$a+b=t$ 라 하면

$t^3-3t-52=0, \quad (t-4)(t^2+4t+13)=0$

$a,\ b$ 가 실수이므로 t 도 실수이다.

$t=4$ 이므로 $a+b=4$

$$준식=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$$

$a+b=4,\ \ ab=1$ 이므로 a,b 는 $x^2-4x+1=0$ 의 근이고

$a^3>b^3$ 이므로 $a>b$

$\therefore\ a=2+\sqrt{3},\ \ b=2-\sqrt{3} \qquad \therefore\ a-b=2\sqrt{3}$

$\therefore$ (준식)$=\dfrac{4+2}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$